

N 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ラ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。

(40 点)

(1) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は次の関係式を満たすとする。

$$a_1 = 0, \quad \begin{cases} b_n = \frac{1}{5}a_n + 1 \\ a_{n+1} = 3b_n + 2 \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $b_1 = \text{ア}$ で、 $n \geq 1$ に対して $b_{n+1} = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}b_n + \frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ となる。これより、

$$b_n = \frac{\text{カ}}{\text{キ}} - \frac{\text{ク}}{\text{ケ}} \left(\frac{\text{コ}}{\text{サ}} \right)^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

となるので、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\text{シ}}{\text{ス}}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_{2n} - b_n}{b_{n+1} - b_n} = \frac{\text{セ}}{\text{ソ}}$$

となる。また、

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_n) = \frac{\text{タ} \text{チ} \text{ツ}}{\text{テ} \text{ト}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) 複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) に対して、複素数 w を

$$w = (4 + 3i)z + 6i\bar{z}$$

で定める。ただし、 i は虚数単位を、 $\bar{z} = \cos \theta - i \sin \theta$ は z と共役な複素数を表す。
いま z の実部と虚部がともに 0 以上となる範囲で θ を動かす。このとき、 w の実部の最大値は

ナ

、最小値は

ニ

 であり、 $w\bar{w}$ の最大値は

ヌ	ネ	ノ
---	---	---

、最小値は

ハ	ヒ
---	---

 である。ただし、 $\bar{w}$ は w と共役な複素数を表す。

右のページは白紙です。

(3) $x > 0$ で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が,

$$f'(x) = 2 \log x + \frac{1}{7-2e} \int_1^e \frac{f(t)}{t} dt, \quad f(1) = 0$$

を満たすとする。ここで、 $f'(x)$ は $f(x)$ の導関数、 $\log$ は自然対数、 e は自然対数の底である。 $f(x)$ を求めると、

$$f(x) = \boxed{\text{フ}} x \log x - \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}} x + \frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}} \quad (x > 0)$$

となる。関数 $f(x)$ は $x = e^{-\frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}}$ のとき、最小値

$$-\boxed{\text{モ}} e^{-\frac{\boxed{\text{ヤ}}}{\boxed{\text{ユ}}}} + \frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$$

をとる。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

- 2** O を原点とする座標平面において、点 $(1, 1)$ を点 $(5, 5)$ に、点 $(1, -7)$ を点 $(-3, 21)$ に移す 1 次変換を f とする。 f による点 P の像を点 Q とするとき、 P に対して内積の条件

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \quad (*)$$

を考える。

- (1) f を表す行列を求めよ。
- (2) 条件 $(*)$ を満たす点 $P(x, y)$ の軌跡は 2 直線となる。この 2 直線の方程式を求めよ。

実数 $a \geq 0$ に対して、

「点 $(a, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上の点 P で、条件 $(*)$ を満たすものがちょうど 2 つある」
(**)

とする。この 2 点を $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_2)$ とするとき、 $i = 1, 2$ に対して、 P_i の f による像を Q_i とし、 $\triangle OP_i Q_i$ の面積を S_i とする。

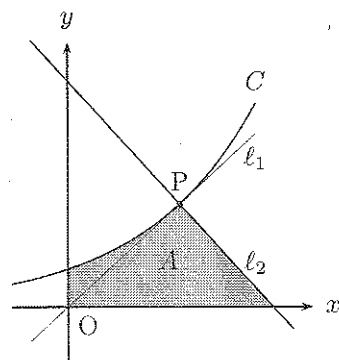
- (3) 上の条件 $(**)$ を満たす a の値の範囲を求めよ。
- (4) S_i を y_i を用いて表せ。また、和 $S_1 + S_2$ の値を a を用いて表せ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

- 3** $k > 0$ として、座標平面上の曲線 $C: y = e^{kx}$ を考える。曲線 C 上の点 P を、 P における C の接線 ℓ_1 が原点 O を通るようにとる。
- また、点 P を通り ℓ_1 と直交する直線を ℓ_2 とし、図のように、曲線 C 、直線 ℓ_2 、 x 軸、 y 軸の4つで囲まれた図形を A とする。ただし、 e は自然対数の底である。



- (1) 点 P の座標と、直線 ℓ_2 と x 軸との交点の座標を求めよ。
- (2) 図形 A を x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を求めよ。
- (3) k が $k > 0$ を動くとき、(2)で求めた V の最小値と、それを与える k の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。