

P 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙には志望学科・受験番号を記入してください。解答用マークシートには受験番号及び氏名を記入し、さらに受験番号・志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ヒ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、テ などは既出の テ を表す。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) a を実数とするとき、方程式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| = a$$

を考える。この方程式の実数解が 2 個であるための条件は

$$a < \boxed{\text{ア}}, \quad \boxed{\text{イ}} < a < \boxed{\text{ウ}} \boxed{\text{エ}}$$

であり、実数解を持たないための条件は

$$a > \boxed{\text{オ}} \boxed{\text{カ}}$$

である。また、次の不等式

$$|x| - |x^2 - 4| + |x + 6| > 2$$

には、正の整数解が キ 個、負の整数解が ク 個ある。

右のページは白紙です。

- (2) 空間内に点 O, A, B, C があり, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおくとき, それぞれの大きさと内積が

$$|\vec{a}| = 9, \quad |\vec{b}| = 12, \quad |\vec{c}| = \sqrt{42},$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 72, \quad \vec{a} \cdot \vec{c} = 57, \quad \vec{b} \cdot \vec{c} = 48$$

であるとする。 $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は $\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\pi$ であり, $\triangle ABC$ の面積は $\frac{\boxed{\text{コ}}\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ である。ベクトル

$$\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$$

が 3 点 A, B, C を通る平面と直交するのは $s = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$, $t = \frac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ のときである。したがって, 四面体 OABC の体積は $\boxed{\text{チ}}\boxed{\text{ツ}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 三角関数についての等式

$$\boxed{\text{デ}} \cos^3 \theta - \boxed{\text{ト}} \cos \theta - \cos 3\theta = 0$$

を利用して、 t に関する3次方程式

$$\boxed{\text{デ}} t^3 - \boxed{\text{ト}} t - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$$

を解いたとき、 $\cos \frac{3}{4}\pi$ が解の1つであることがわかる。したがって、この方程式の残りの2つの解は、

$$\cos \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12} \pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

と

$$\cos \frac{\boxed{\text{ノ}}}{12} \pi = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ニ}}} - \sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$$

となる。これより、

$$\tan \frac{\boxed{\text{ナ}}}{12} \pi = \boxed{\text{ハ}} - \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}$$

となる。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 a を正の定数とし、座標平面において放物線 $C: y = ax^2$ 上の点 $P(t, at^2)$ を考える。ただし、 $t > 0$ とする。点 P における C の接線 ℓ と x 軸の交点を R とする。 x 軸上の点 Q を、 $RP = RQ$ を満たし、その x 座標が R の x 座標より大きいものとする。

- (1) 点 P を通り ℓ と直交する直線の方程式を求めよ。
- (2) 点 Q の座標を求めよ。
- (3) 直線 ℓ と点 P において接し x 軸とも接する円で、中心が第 1 象限にあるものを考える。この円の中心の座標を (q, r) とするとき、 q, r を t と a を用いて表せ。
- (4) (3) の q, r に対して、 t が 0 に限りなく近づくときの、 $\frac{q}{t}, \frac{r}{t^2}, \frac{r}{q^2}$ の極限値をそれぞれ求めよ。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 自然数 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $x > 0$ で定義された関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \frac{\log x}{x^n} \quad (x > 0)$$

で定める。ただし, $\log$ は自然対数を表す。

$t > 1$ とするとき, 座標平面において曲線 $y = f_n(x)$ の $x \leq t$ の部分, x 軸, 直線 $x = t$ の 3 つで囲まれている図形の面積を $S_n(t)$ とする。また, 4 点 $(1, 0)$, $(t, 0)$, $(t, f_n(t))$, $(1, f_n(t))$ を頂点とする長方形の面積を $T_n(t)$ とする。

- (1) 関数 $f_n(x)$ が極大となるときの x の値と, そのときの $f_n(x)$ の極大値を求めよ。
- (2) t が $t > 1$ を動くとき, $T_n(t) - S_n(t)$ が最大となる t の値を求めよ。
- (3) $S_1(t)$ と $S_n(t)$ ($n \geq 2$) を求めよ。
- (4) 各 $n \geq 2$ に対して $T_n(t) = S_n(t)$ となる t ($t > 1$) がただ 1 つあることを示せ。

ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ となることを用いてもよい。

(30 点, ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。