

1

【解答】

(1)

ア 1 イ 3 ウ 1 エ 3 オ 1
カ 6 キ 1 ク 1 ケ 8

(2)

コ 1 サ 1 シ 6 ス 1 セ 1
ソ 6 タ 1 チ 1 ツ 8 テ 0
ト 1 ナ 3 ニ 9 ノ 6 ネ 0

(3)

ノ 0 ハ 0 ヒ 1 フ 2 ヘ 1
ホ 2 マ 2 ミ 3 ム 1 メ 9

【解説】

(1)

(a)

初項が a で公差が d である等差数列の一般項は、

$$a_n = a + (n-1)d \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。ここで、第4項は、

$$a_4 = a + 3d$$

となり、これが3で割り切れる整数となるためには、 $a=3, 6$ となればよい。よって、求める確

率は、 $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ となる。

(b)

①より、第8項は、

$$a_8 = a + 7d = 3 \cdot 2d + a + d$$

となる。これが3で割り切れる整数となるためには、 $a+d$ が3の倍数となればよい。

$(a, d) = (1, 2), (1, 5), (2, 1), (2, 4), (3, 3), (3, 6), (4, 2), (4, 5), (5, 1), (5, 4), (6, 3), (6, 6)$ の12通

りがあるので、求める確率は、 $\frac{12}{36} = \frac{1}{3}$ となる。

(c)

①より、第11項は、

$$a_{11} = a + 10d = 5 \cdot 2d + a$$

となる。これが5で割り切れる整数となるためには、 $a=5$ となればよい。よって、求める確

率は、 $\frac{1}{6}$ となる。

(d)

①より、第101項は、

$$a_{101} = a + 100d = 15 \cdot 6d + a + 10d$$

となる。これが15で割り切れる整数となるためには、 $a+10d$ が15の倍数となればよい。

$(a, d) = (5, 1), (5, 4)$ の2通りがあるので、求める確率は、 $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$ となる。

(2)

(a)

$$\begin{aligned} f_3(x) &= \left(x + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (x+1) \\ &= x^3 + \frac{11}{6}x^2 + x + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

となる。

(b)

$f_7(x)$ について、展開したときに x となる項にのみ注目する。簡単のため、 $f_3(x)$ の場合で考

えると、 x の係数は、

$$\left(x \cdot \frac{1}{2} \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot 1\right) + \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot x\right) = \sum_{k=1}^3 \frac{k}{3!} x$$

と表せる。よって、 $f_7(x)$ についても同様にして、

$$\sum_{k=1}^7 \frac{k}{7!} = \frac{1}{7!} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 8 = \frac{1}{180}$$

となる。

(c)

(b)と同様に、 $f_8(x)$ について、展開したときに x^2 となる項にのみ注目する。 $f_8(x)$ は、

$$f_8(x) = \left(x + \frac{1}{8}\right) \left(x + \frac{1}{7}\right) \cdots (x+1)$$

であり、 x^2 の係数は、 $\frac{1}{i} (i=1, \dots, 8)$ の中から異なる6個を選び、かけあわせたものの総和で

ある。よって、求める係数は、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8!} (1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + \cdots + 1 \cdot 8 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + \cdots + 2 \cdot 8 + \cdots + 7 \cdot 8) \\ &= \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{2} \left\{ (1+2+\cdots+8)^2 - (1^2+2^2+\cdots+8^2) \right\} \\ &= \frac{1}{8!} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 9\right)^2 - \frac{1}{6} \cdot 8 \cdot 9 \cdot 17 \right\} \\ &= \frac{13}{960} \end{aligned}$$

となる。

(3)

(a)

s, t をそれぞれ0以上1以下の実数とすると、線分AD、BC上の任意の点の座標はそれぞれ

$$\text{AD} : (1, 0, 0) + s(-2, 0, 1) = (1-2s, 0, s)$$

$$\text{BC} : (-1, 0, 0) + t(2, 0, 1) = (-1+2t, 0, t)$$

とおける。

$$\begin{cases} 1-2s = -1+2t \\ s = t \end{cases}$$

$$\therefore s = \frac{1}{2}, t = \frac{1}{2}$$

より、交点の座標は $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$ となる。

(b)

まず、(a)と同様にして、線分AQと線分BPの交点Rを求める。それぞれ s, t を用いて、

$$\text{AQ} : (1, 0, 0) + s(-2, 2\sin^2 \theta, 0) = (1-2s, 2s\sin^2 \theta, 0)$$

$$\text{BP} : (-1, 0, 0) + t(2, 2\cos^2 \theta, 0) = (-1+2t, 2t\cos^2 \theta, 0)$$

とおける。

$$\begin{cases} 1-2s = -1+2t \\ 2s\sin^2 \theta = 2t\cos^2 \theta \end{cases}$$

$$\therefore s = \cos^2 \theta, t = \sin^2 \theta$$

より、 $R\left(-\cos 2\theta, \frac{1}{2}\sin^2 2\theta, 0\right)$ となる。ここで、三角形ABPと三角形BAQの共通部分の面

積は、三角形ABRの面積に等しい。したがって、底辺を線分ABとすれば、三角形ABRの

面積は、

$$\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\sin^2 2\theta = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

となる。したがって、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ より、三角形ABPと三角形BAQの共通部分の面積の最大

値は、 $\frac{1}{2}$ ($\theta = \frac{\pi}{4}$ のとき) である。

続いて、三角形ABPと三角形BAQの共通部分が通過する部分の面積は、点Rの軌跡と x 軸

とで囲まれる部分の面積に等しい。よって、

$$x = -\cos 2\theta, y = \frac{1}{2}\sin^2 2\theta$$

$$dx = 2\sin 2\theta d\theta$$

として、求める面積は、

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 y dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}\sin^2 2\theta \cdot (2\sin 2\theta) d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta \cdot \cos^3 \theta d\theta \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - \sin^5 \theta) \cdot \cos \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $u = \sin \theta$ として置換積分を行うと、

$$\begin{aligned} 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3 \theta - \sin^5 \theta) \cdot \cos \theta d\theta &= 8 \int_0^1 (u^3 - u^5) du \\ &= 8 \left[\frac{u^4}{4} - \frac{u^6}{6} \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

となる。

(c)

(b)より、三角形ABPと三角形BAQの共通部分が通過する部分の面積は、 $\frac{2}{3}$ であり、この面

を底面とすると、(a)より、高さは、 $\frac{1}{2}$ となる。よって、2つの四面体の共通部分が通過する部

分の体積は、

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{9}$$

となる。

(1)

$t > 1$ のとき, $t \leq x \leq t+1$ の範囲では, $\log x$ は常に正なので,

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_t^{t+1} |\log x| dx \\ &= \int_t^{t+1} \log x dx \\ &= [x \log x - x]_t^{t+1} \\ &= -1 - t \log t + \log(t+1) + t \log(t+1) \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -1 - t \log t + \log(t+1) + t \log(t+1)$$

(2)

$t \rightarrow \infty$ を考えるので, $t > 1$ としてよい。 $t \leq x \leq t+1$ において,

$$\log t \leq \log x \leq \log(t+1)$$

である。この不等式の等号は常には成り立たないから,

$$\begin{aligned} \int_t^{t+1} \log t dx &< \int_t^{t+1} \log x dx < \int_t^{t+1} \log(t+1) dx \\ \Leftrightarrow \log t &< S(t) < \log(t+1) \\ \Leftrightarrow 1 &< \frac{S(t)}{\log t} < \frac{\log(t+1)}{\log t} \quad (\because t > 1 \Rightarrow \log t > 0) \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(t+1)}{\log t} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log(t+1) - \log t + \log t}{\log t} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{t}\right) + \log t}{\log t} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となるので, はさみうちの原理より, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{\log t} = 1$ である。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{\log t} = 1$$

(3)

$$|\log x| = \begin{cases} \log x & (1 < x) \\ -\log x & (0 < x \leq 1) \end{cases}$$

より,

$$\begin{aligned} S(t) &= -\int_t^1 \log x dx + \int_1^{t+1} \log x dx \\ &= -[x \log x - x]_t^1 + [x \log x - x]_1^{t+1} \\ &= 1 + t \log t + \log(t+1) + t \log(t+1) - 2t \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 1 + t \log t + \log(t+1) + t \log(t+1) - 2t$$

(4)

$t > 1$ のとき, $S(t)$ は明らかに増加関数であるから, $S(t)$ の最小値は, $0 < t \leq 1$ の範囲に存在するといえる。 $0 < t \leq 1$ のとき,

$$\begin{aligned} S'(t) &= \log t + 1 + \frac{1}{t+1} + \log(t+1) + \frac{t}{t+1} - 2 \\ &= \log t + \log(t+1) \\ &= \log(t^2 + t) \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} S'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + t &= 1 \\ \therefore t &= \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad (\because 0 < t \leq 1) \end{aligned}$$

より, 増減表は次のようになる。

t	0	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	1
$S'(t)$		-	0	+	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって, 前表より, $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ のときに最小値をとる。

$$(\text{答}) \quad c = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

3

【解答】

(1)

$$A^n = \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{n-1} + b_{n-1} & a_{n-1} \\ 2c_{n-1} + d_{n-1} & c_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $b_n = a_{n-1}$ である。

(証明終)

(2)

$$A^n = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} & b_{n-1} \\ c_{n-1} & d_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_{n-1} + c_{n-1} & 2b_{n-1} + d_{n-1} \\ a_{n-1} & b_{n-1} \end{pmatrix}$$

となる。よって、 $d_n = b_{n-1}$ である。

(証明終)

(3)

(答) $\frac{s^4}{4}$

(4)

明らかに

$$a_n > 0, b_n > 0, d_n > 0$$

であり、(1)より

$$a_n - b_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1} + b_{n-1} > 0$$

$$\therefore a_n > b_n$$

であるので、 $-a_n < -b_n < d_n$ である。したがって、(3)を利用すると

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-a_n}^{-b_n} (x+a_n)(x+b_n)(x-d_n) dx \right| + \left| \int_{-b_n}^{d_n} (x+a_n)(x+b_n)(x-d_n) dx \right| \\ &= 2 \times \frac{(a_n - b_n)^4}{4} \\ &= \frac{(a_n - a_{n-1})^4}{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{(a_n - a_{n-1})^4}{2}$

(5)

(答) $\frac{2825761}{2}$

【解説】

(3)

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\{(x-\beta)+(\alpha-\beta)\} dx (\because \gamma = 2\beta - \alpha) \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)^2 - (\beta-\alpha)(x-\alpha)(x-\beta)\} dx \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} \{(x-\alpha)^3 - 2s(x-\alpha)^2 + s^2(x-\alpha) - s(x-\alpha)(x-\beta)\} dx \\ &= \left[\frac{1}{4}(x-\alpha)^4 - \frac{2}{3}s(x-\alpha)^3 + \frac{s^2}{2}(x-\alpha)^2 \right]_{\alpha}^{\beta} + s \cdot \frac{1}{6}s^3 \\ &= \frac{1}{4}s^4 - \frac{2}{3}s^4 + \frac{1}{2}s^4 + \frac{1}{6}s^4 \\ &= \frac{s^4}{4} \end{aligned}$$

となる。

(5)

(4)より、求める面積は、 $\frac{(a_5 - a_4)^4}{2}$ となる。(1)と(2)より、

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \\ A^4 &= \begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix} \\ A^5 &= \begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \frac{(a_5 - a_4)^4}{2} &= \frac{(70 - 29)^4}{2} \\ &= \frac{2825761}{2} \end{aligned}$$

となる。