

1

(1)

(a)

$$\begin{aligned} P^{n+1} &= \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1+t & z \\ 0 & 1+s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (1+t)p_n & zp_n + (1+s)q_n \\ (1+t)r_n & zr_n + (1+s)s_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから、

$$p_{n+1} = (1+t)p_n \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$r_{n+1} = (1+t)r_n \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$q_{n+1} = zp_n + (1+s)q_n \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$s_{n+1} = zr_n + (1+s)s_n \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$p_1 = 1+t, r_1 = 0$ であるから①, ②より

$$p_n = (1+t)^n, r_n = 0$$

である。よって④は $s_{n+1} = (1+s)s_n$ であり, $s_1 = 1+s$ であるから

$$s_n = (1+s)^n$$

である。

$$(\text{答}) \quad p_n = (1+t)^n, r_n = 0, s_n = (1+s)^n$$

(b)

③より $q_{n+1} = zp_n + (1+s)q_n$ であるから $q_n = zu_n$ として代入すると

$$zu_{n+1} = z(1+t)^n + (1+s)zu_n$$

$z \neq 0$ なので両辺を z で割って、

$$u_{n+1} = (1+t)^n + (1+s)u_n$$

となる。

$$(\text{答}) \quad u_{n+1} = (1+t)^n + (1+s)u_n$$

(c)

数学的帰納法で示す。

[1] $n=1$ のとき

$$u_1 = \frac{q_1}{z} = 1$$

であるから $n=1$ のとき成立する。

[2] $n=k$ のとき成立すると仮定すると, $u_k \geq k$ となる。

$n=k+1$ のときを考えると, (b)より

$$u_{k+1} = (1+t)^k + (1+s)u_k$$

である。 $u_k \geq k, s, t \geq 0$ であるから、

$$(1+t)^k + (1+s)u_k \geq (1+t)^k + (1+s)k$$

である。 $s, t \geq 0$ であるから, $1+s \geq 1, 1+t \geq 1$ であるので、

$$(1+t)^k + (1+s)k \geq 1+k$$

である。すなわち $u_{k+1} \geq 1+k$ となる。よって $n=k+1$ のときでも成り立つので題意は示された。

(答) 証明終

(2)

(a)

$a=0$ のとき

$$a_{2k} = 1$$

である。

$a>0$ のとき

$$\begin{aligned} C_{2k} &= (A_{2k} B_{2k})^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2k} & b-a \\ 0 & 1 + \frac{b}{2k} \end{pmatrix}^k \end{aligned}$$

であるから, (1)より, p_n について $t = \frac{a}{2k}$ と考えて

$$a_{2k} = \left(1 + \frac{a}{2k}\right)^k$$

である。よって

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{2k}\right)^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{2k}\right)^{\frac{2k}{a}} \right\}^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

ここで $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ であるから、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} &= \lim_{k \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{a}{2k}\right)^{\frac{2k}{a}} \right\}^{\frac{a}{2}} \\ &= e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

である。この答えは $a=0$ の場合も含んでいる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = e^{\frac{a}{2}}$$

(b)

$$\begin{aligned} C_{2k+1} &= (A_{2k+1} B_{2k+1})^k A_{2k+1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2k+1} & b-a \\ 0 & 1 + \frac{b}{2k+1} \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & a \\ \frac{1}{2k+1} & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。 $\begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2k+1} & b-a \\ 0 & 1 + \frac{b}{2k+1} \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} p_k & q_k \\ r_k & s_k \end{pmatrix}$ とおくと、

$$a_{2k+1} = p_k + \frac{1}{2k+1} q_k$$

である。ここで $n \rightarrow \infty$ の極限を考えると、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} p_k &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ &= e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

である。 $b-a=0$ のとき, $q_k = 0$ となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \\ &= e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

である。よってこのとき数列 $\{a_n\}$ は収束しその極限值は $e^{\frac{a}{2}}$ である。

また $b-a \neq 0$ のとき(1)(c)より, $z = b-a$ と考えて $\frac{q_k}{b-a} \geq k$ であるから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} \cdot \frac{q_k}{b-a} \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{2k+1} = \frac{1}{2}$$

である。

よって $b-a>0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} q_k &\geq \frac{1}{2} (b-a) \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} &= e^{\frac{a}{2}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} q_k \\ &\geq e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2} (b-a) \\ &> e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

となり $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ の値が一致しないので $\{a_n\}$ は発散する。

$b-a<0$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} q_k &\leq \frac{1}{2} (b-a) < 0 \\ \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} &= e^{\frac{a}{2}} + \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{2k+1} q_k \\ &\leq e^{\frac{a}{2}} + \frac{1}{2} (b-a) \\ &< e^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

となり $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1}$ と $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ の値が一致しないので $\{a_n\}$ は発散する。

よって $b-a>0, b-a<0$ のどちらでも $\{a_n\}$ は発散する。よって $b-a \neq 0$ のとき $\{a_n\}$ は発散する。

$$(\text{答}) \quad b-a=0 \text{ のとき収束し極限值 } e^{\frac{a}{2}}$$

$b-a \neq 0$ のとき発散する。

(c)

$$\begin{aligned} C_{2k} &= (A_{2k} B_{2k})^k \\ &= \begin{pmatrix} 1 + \frac{a}{2k} & b-a \\ 0 & 1 + \frac{b}{2k} \end{pmatrix}^k \end{aligned}$$

であり, (b)同様に考えて, $b-a=0$ のとき, $b_{2k} = 0$ となるから収束しその極限值は 0 である。

$b-a \neq 0$ のとき(1)(c)より, $z = b-a$ と考えて $\frac{b_{2k}}{b-a} \geq k$ であるから

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} b_{2k} &= (b-a) \cdot \infty \\ &= \pm \infty \end{aligned}$$

である。よって $\{b_{2k}\}$ は発散する。

$$(\text{答}) \quad b-a=0 \text{ のとき収束し極限值は } 0$$

$b-a \neq 0$ のとき発散する。

(d)

(b)と同様にして, $b_{2k+1} = ap_k - q_k$ である。

$b-a=0$ のとき, $q_k = 0$ となるから、

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} ap_k \\ &= ae^{\frac{a}{2}} \end{aligned}$$

である。これは $a=b=0$ のときのみ極限值 0 をとり, $a=b \neq 0$ のとき, b_{2k} の極限と異なるので $\{b_n\}$ は収束せずに発散する。

$b-a \neq 0$ のとき(1)(c)より, $z = b-a$ と考えて $\frac{q_k}{b-a} \geq k$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_k}{b-a} = \infty \text{ である。よって}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} b_{2k+1} &= \lim_{k \rightarrow \infty} (ap_k - q_k) \\ &= ae^{\frac{a}{2}} - (b-a) \cdot \infty \end{aligned}$$

よって $\{b_n\}$ は発散する。以上からまとめると、

$a=b=0$ のとき収束し極限值は 0 をとり, それ以外のときは発散する。

$$(\text{答}) \quad a=b=0 \text{ のとき収束し極限值は } 0 \text{ をとり, それ以外のときは発散}$$

2

(1)

(a)

$\log_{10} m$ が有理数であるとき、 $\log_{10} m = \frac{b}{a}$ (a, b は互いに素な整数でかつ $a \neq 0$) と表せる。

$$\begin{aligned}\log_{10} m &= \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow m &= 10^{\frac{b}{a}} \\ \Leftrightarrow m^a &= 10^b = 2^b \cdot 5^b\end{aligned}$$

と表せるので m は 2 と 5 のみを素因数としてもつ。よって整数 c, d を用いて $m = 2^c \cdot 5^d$ と表せ

るので、これを代入すると、 $m^a = (2^c \cdot 5^d)^a = 2^{ac} \cdot 5^{ad}$ であるから

$$\begin{aligned}2^{ac} \cdot 5^{ad} &= 2^b \cdot 5^b \\ \Leftrightarrow ac &= b, ad = b \\ \Leftrightarrow c &= d = \frac{b}{a}\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\log_{10} m &= \log_{10} 10^{\frac{b}{a}} \\ &= \frac{b}{a} \\ &= c\end{aligned}$$

となるから $\log_{10} m$ は整数である。以上より題意は示された。

(答) 証明終

(b)

(a)より $\log_{10} m$ が有理数であるとき、整数となる。したがって、無理数となるものの数は、2013 個の数から $\log_{10} m$ が整数となるものを除いた数となる。 $\log_{10} m$ が整数となるものは、整数 n を用いると、 $m \geq 2$ において、

$$\log_{10} m = n$$

となる。したがって、

$$m = 10^n$$

となり、これを満たす m ($1 \leq m \leq 2013$) は $n = 1, 2, 3$ であるから、

$$m = 10, 100, 1000$$

である。 $m = 1$ も $\log_{10} m$ が整数となるので、 $\log_{10} m$ が整数となるものの数は、4 個である。したがって、有理数でないものは無理数なので無理数となるものの個数は

$$2013 - 4 = 2009 \text{ 個}$$

である。

(答) 2009 個

(2)

(a)

$\sqrt[n]{m}$ が有理数であるとき $\sqrt[n]{m} = \frac{b}{a}$ (a, b は互いに素な整数でかつ $a \neq 0$) と表せる。

よって、

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{m} &= \frac{b}{a} \\ \Leftrightarrow m &= \frac{b^n}{a^n}\end{aligned}$$

である。ここで m は整数なので $\frac{b^n}{a^n}$ も整数でなければならない。しかし a, b は互いに素な整数なので共通の約数を 1 以外に持たない。よって $a = 1$ 以外にありえない。

すなわち

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{m} &= \sqrt[n]{b^n} \\ &= b\end{aligned}$$

となるから $\sqrt[n]{m}$ は整数である。よって題意は示された。

(答) 証明終

(b)

$\sqrt[n]{m}$ の中で有理数となるものは(a)より整数である。よって有理数であるものの個数と整数であるものの個数は等しいので $\sqrt[n]{m}$ が整数となるものの数を数える。整数 n を用いて、

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{m} &= n \\ \Leftrightarrow m &= n^6\end{aligned}$$

である。これを満たす m ($1 \leq m \leq 2013$) は、 $1^6 = 1, 2^6 = 64, 3^6 = 729, 4^6 = 4096$ より

$$n = 1, 2, 3$$

である。よって、 $\sqrt[n]{m}$ が整数となるものの数は、

$$m = 1, 64, 729$$

の 3 個である。したがって、有理数でないものはすべて無理数であるから、無理数であるものの個数は、

$$2013 - 3 = 2010 \text{ 個}$$

である。

(答) 2010 個

(c)

$\sqrt{m}$ の中で有理数となるものは(a)より整数である。よって有理数であるものの個数と整数であるものの個数は等しい。 $m = 1, 2, \dots, 2013$ で考えると、 $44^2 = 1936, 45^2 = 2025$ より

$\sqrt{m}$ が整数となるのは $\sqrt{m} = 1, 2, \dots, 44$ の 44 個である。有理数でないものはすべて無理数であるから、無理数であるものの個数は、

$$2013 - 44 = 1969 \text{ 個}$$

である。

(答) 1969 個