

# 1

## 【解答】

- (1)    ア, イ, ウ        2, 2, 1  
        エ, オ, カ        2, 2, 1  
        キ, ク, ケ, コ    2, 3, 2, 3  
        サ, シ, ス, セ    1, 3, 1, 3
- (2)        ソ                1  
        タ, チ, ツ        1, 4, 4  
        テ                2  
        ト                3  
        ナ                2
- (3)        ニ                3  
        ヌ, ネ            3, 6  
        ノ, ハ, ヒ        0, 2, 2  
        フ, ヘ, ホ        0, 2, 2  
        マミ              10  
        ムメ              10

## 【解説】

(1)

(a)

取り出した球の一つの番号が  $k$  で、もう一つは  $k$  未満の番号であればよいので、求める確率は、

$$\frac{k-1}{{}_N C_2} = \frac{2k-2}{N^2-N}$$

である。

(b)

取り出した球の一つの番号が  $k$  で、もう一つは  $k$  より大きい番号であればよいので、求める確率は、

$$\frac{N-k}{{}_N C_2} = \frac{2N-2k}{N^2-N}$$

である。

(c)

大きいほうの番号を  $k$  とすると、求める期待値は、(a)より、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=2}^N \frac{2k-2}{N^2-N} \cdot k \\ &= \frac{2}{N^2-N} \sum_{k=1}^N (k^2 - k) \\ &= \frac{2}{N^2-N} \cdot \frac{1}{6} N(N+1)(2N+1-3) \\ &= \frac{2}{3} N + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

である。

(d)

小さいほうの番号を  $k$  とすると、求める期待値は、(b)より、

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N-1} \frac{2N-2k}{N^2-N} \cdot k \\ &= \frac{2}{N^2-N} \sum_{k=1}^{N-1} (Nk - k^2) \\ &= \frac{2}{N^2-N} \cdot \frac{1}{6} N(N+1)(3N-2N-1) \\ &= \frac{1}{3} N + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

である。

(2)

[1]     $x \geq 0$  のとき

$$C: y = x^2 - 2x$$

であるので、曲線  $C$  と直線  $l$  を連立すると、

$$x^2 - (a+2)x - b = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となり、この判別式を  $D$  とすると、

$$D = (a+2)^2 + 4b$$

となる。よって、 $a$  の値によらず曲線  $C$  と直線  $l$  が常に共有点をもつには、

$$D \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}(a+2)^2$$

となり、

$$a+2 > 2$$

であるので、

$$b \geq -1$$

となればよい。

[2]     $x < 0$  のとき

[1]と同様にし、曲線  $C$  と直線  $l$  を連立すると、

$$x^2 + (2-a)x - b = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となり、この判別式を  $D'$  とすると、となる。よって、

$$D' \geq 0$$

$$\Leftrightarrow b \geq -\frac{1}{4}(2-a)^2$$

となり、

$$(2-a)^2 \geq 0$$

であるので、

$$b \geq 0$$

となればよい。

以上、[1]、[2]より、 $b \geq -1$  のとき、 $a$  の値に関わらず、 $C$  と  $l$  はつねに共有点をもつ。

また、 $a > 0$  より、

$$(a+2)^2 > (a-2)^2$$

であるので、

$$-\frac{1}{4}(a+2)^2 < -\frac{1}{4}(a-2)^2$$

となり、[1]と[2]より、曲線  $C$  と直線  $l$  が共有点をもたないような  $k$  の範囲は、

$$b < -\frac{1}{4}(a^2 + 4a + 4)$$

と表される。また、 $b = 0$  のとき、[1]の①より、共有点の  $x$  座標は、

$$x = 0, a+2 (> 0)$$

であるので、 $x \geq 0$  の範囲では必ず2個共有点がある。         $\cdots \textcircled{3}$

次に、 $x < 0$  における共有点の個数は、②より、

$$x^2 - (a-2)x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = a-2 \quad (\because x < 0)$$

となるので、 $a-2$  と 0 の大小で場合わけする。よって、 $x < 0$  において、共有点の個数は、

$$a < 2 \text{ ならば } 1 \text{ 個} \quad \cdots \textcircled{4}$$

$$a \geq 2 \text{ ならば } 0 \text{ 個} \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。以上、③、④、⑤より、共有点の個数は、

$$a < 2 \text{ ならば } 3 \text{ 個}$$

$$a \geq 2 \text{ ならば } 2 \text{ 個}$$

となる。

(3)

まず、

$$\overline{a} = \left( \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$$

である。また、実数  $m, n (n < 0)$  を用いて、

$$\overline{b} = (m, n, n)$$

とすると、 $\overline{a}$  と  $\overline{b}$  が垂直、すなわちベクトル  $(1, 1, 1)$  と  $\overline{b}$  が垂直であるので、

$$m + 2n = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$|\overline{b}| = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2n^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となるので、 $n < 0$  であるから、①と②より、

$$\begin{cases} m = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ n = -\sqrt{\frac{1}{6}} \end{cases}$$

となる。また、 $\overline{a}$  と  $\overline{b}$  の両方に垂直で、大きさが1のベクトルを、実数  $s, t, u$  を用いて、

$$(s, t, u)$$

とすると、

$$\begin{cases} s^2 + t^2 + u^2 = 1 & \cdots \textcircled{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} s + t + u = 0 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2s - t - u = 0 & \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

となる。④+⑤より、

$$s = 0 \quad \cdots \textcircled{6}$$

となるので、④に代入しなおすと、

$$t = -u \quad \cdots \textcircled{7}$$

であるので、⑥と⑦を③に代入すると、

$$u = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

となる。よって、⑦より、求める二つのベクトルは、

$$\begin{cases} \overline{c_1} = \left( 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}} \right) \\ \overline{c_2} = \left( 0, \sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{1}{2}} \right) \end{cases}$$

である。

また、

$$\begin{cases} \overline{d_1} = \left( \sqrt{\frac{2}{3}} + \sqrt{2}, \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} - \sqrt{\frac{5}{2}}, \sqrt{\frac{2}{3}} - \sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{5}{2}} \right) \\ \overline{d_2} = \left( \frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} + \sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{3}} - \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \end{cases}$$

となるので、

$$\begin{cases} |\overline{d_1}| = \sqrt{10} \\ |\overline{d_2}| = \sqrt{10} \end{cases}$$

である。

2

(1)

$A$  が逆行列を持つと仮定すると,

$$AB = O$$

となるので, 左から  $A^{-1}$  をかけると,

$$\begin{aligned} A^{-1}AB &= O \\ \Leftrightarrow B &= O \end{aligned}$$

となる。これは,  $B^2 \neq O$  の条件に矛盾するので, 背理法より,  $A$  は逆行列を持たない。

(証明終)

(2)

(1)より,  $A$  が逆行列を持たないことから,

$$ad - bc = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

であり, ケーリーハミルトンの定理より,

$$A^2 = (a+d)A \quad \dots \textcircled{2}$$

となるので,

$$\begin{aligned} A^2 &= \alpha A \\ \Leftrightarrow (a+d)A &= \alpha A \\ \Leftrightarrow (a+d-\alpha)A &= O \end{aligned}$$

となる。よって,  $A^2 \neq O$  より  $A \neq O$  であるから

$$\begin{aligned} a+d-\alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= a+d \end{aligned}$$

である。

(答)  $\alpha = a+d$

(3)

(a)

(1), (2)と同様にして,

$$\beta = e+h$$

となる。よって,

$$P^2 = \frac{1}{(a+d)^2}A^2 + \frac{1}{(e+h)^2}B^2 \quad (\because AB = O)$$

であるので, ②より,

$$P^2 = \frac{1}{\alpha}A + \frac{1}{\beta}B$$

となる。よって,

$$P^2 - P = O$$

である。

(答)  $P^2 - P = O$

(b)

$$P = \frac{1}{a+d} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \frac{1}{e+h} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$$

となるので,

$$\begin{aligned} p+s &= \frac{a}{a+d} + \frac{e}{e+h} + \frac{d}{a+d} + \frac{h}{e+h} \\ &= 2 \end{aligned}$$

である。

(答)  $p+s=2$

(c)

ケーリーハミルトンの定理と(b)から,

$$P^2 - 2P + (ps - qr)E = O \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。また, (a)より,

$$P^2 = P$$

であるので, ③に代入すると,

$$P = (ps - qr)E \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。ここで,

$$ps - qr = \frac{ad - bc}{\alpha^2} + \frac{eh - fg}{\beta^2} + \frac{ah + de - bg - cf}{\alpha\beta}$$

であるので, ①より,

$$ps - qr = \frac{ah + de - bg - cf}{\alpha\beta}$$

となる。また,  $AB = O$  より,

$$\begin{cases} ae + bg = 0 \\ cf + dh = 0 \end{cases}$$

を代入すると,

$$\begin{aligned} ps - qr &= \frac{a(e+h) + d(e+h)}{(a+d)(e+h)} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。よって, ④に代入すると,

$$P = E$$

となる。

(答)  $P = E$

3

(1)

$$\begin{aligned}\cos 2t - \cos 2(\pi - t) &= \cos 2t - \cos 2t \\ &= 0 \\ \cos 3t + \cos 3(\pi - t) &= \cos 3t + \cos(\pi - 3t) \\ &= \cos 3t - \cos 3t \\ &= 0\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \cos 2t - \cos 2(\pi - t) = 0, \quad \cos 3t + \cos 3(\pi - t) = 0$$

(2)

(1)より,

$$\begin{aligned}\cos 2a &= \cos 2b \\ \Leftrightarrow \cos 2(\pi - a) &= \cos 2b\end{aligned}$$

となり,  $0 < a < b < \pi$  なので,

$$\pi - a = b \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また,

$$\begin{aligned}\cos 3a &= \cos 3b \\ \Leftrightarrow -\cos 3(\pi - a) &= \cos 3(\pi - a) \\ \Leftrightarrow \cos 3(\pi - a) &= 0\end{aligned}$$

となり,  $0 < \pi - a < \pi$  より,

$$\begin{aligned}3(\pi - a) &= \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi \\ \Leftrightarrow a &= \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi\end{aligned}$$

となる。ここで,  $a = \frac{\pi}{2}, \frac{5}{6}\pi$  のときは,  $a < b$  に反するので不適である。よって,

$$a = \frac{\pi}{6}$$

であり, ①より,

$$b = \frac{5}{6}\pi$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\pi}{6}, \quad b = \frac{5}{6}\pi$$

(3)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2\sin 2t \\ \frac{dy}{dt} = -3\sin 3t \end{cases}$$

であるので,

$$\begin{cases} 0 \leq 2t \leq \pi \\ 0 \leq 3t \leq \frac{3}{2}\pi \end{cases}$$

より,

$$\frac{dx}{dt} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

であり,

$$\frac{dy}{dt} < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 < t < \frac{\pi}{3}$$

となる。よって,  $I_1$  は,

$$0 < t < \frac{\pi}{3}$$

である。また,

$$\frac{dy}{dt} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{3} < t \leq \frac{\pi}{2}$$

であるので, ②より,  $I_2$  は,

$$\frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$$

となる。

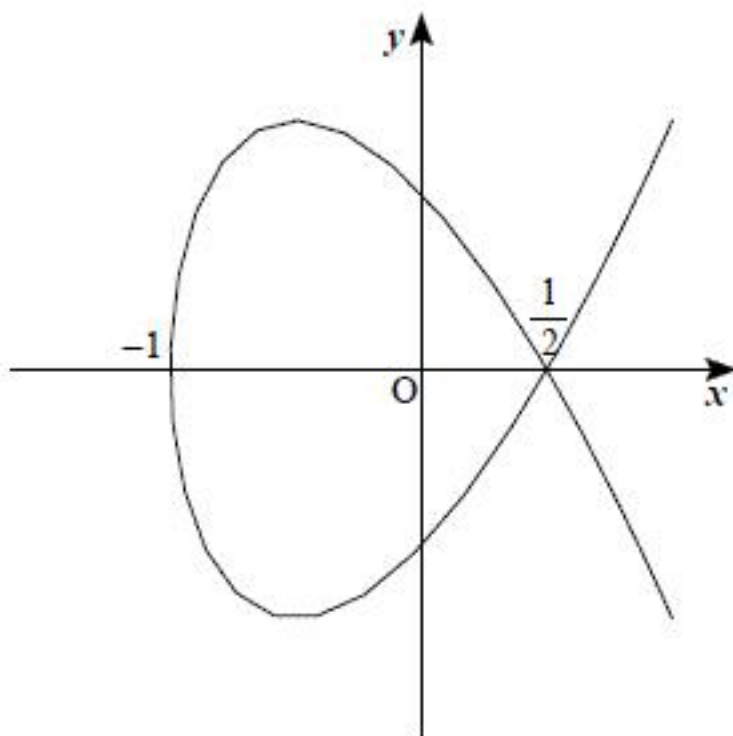
$$(\text{答}) \quad I_1: 0 < t < \frac{\pi}{3}, \quad I_2: \frac{\pi}{3} < t < \frac{\pi}{2}$$

(4)

増減表は以下の通りになる。

|                 |   |     |                 |     |                 |     |                  |     |       |
|-----------------|---|-----|-----------------|-----|-----------------|-----|------------------|-----|-------|
| $t$             | 0 | ... | $\frac{\pi}{3}$ | ... | $\frac{\pi}{2}$ | ... | $\frac{2}{3}\pi$ | ... | $\pi$ |
| $\frac{dx}{dt}$ |   | -   | -               | -   | 0               | +   | +                | +   |       |
| $\frac{dy}{dt}$ |   | -   | 0               | +   | +               | +   | 0                | -   |       |
| $x$             | 1 | ←   | ←               | ←   | -1              | →   | →                | →   | 1     |
| $y$             | 1 | ↓   | -1              | ↑   | ↑               | ↑   | 1                | ↓   | -1    |

よって, 点  $(x, y)$  が描く曲線は下図のようになる。



(答)前図

(5)

$$\begin{aligned}y^2 &= \cos^2 3t \\ &= (4\cos^3 t - 3\cos t)^2 \\ &= \cos^2 t (16\cos^4 t - 24\cos^2 t + 9)\end{aligned}$$

となり, ここで,

$$\begin{aligned}\cos 2t &= x \\ \Leftrightarrow \cos^2 t &= \frac{x+1}{2}\end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned}y^2 &= \frac{x+1}{2} \left\{ 4(x+1)^2 - 12(x+1) + 9 \right\} \\ &= 2x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad y^2 = 2x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$$

(6)

図より, 求める体積は,

$$\begin{aligned}&\pi \int_{-1}^{\frac{1}{2}} y^2 dx \\ &= \pi \left[ \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{2}x \right]_{-1}^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{27}{32}\pi\end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{27}{32}\pi$$