

1

(1)

$0 \leq x < 1$ のとき,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n u_k(x) &= \frac{x(1-x^n)}{1-x} - 2 \frac{x^3(1-x^{2n})}{1-x^2} \\ &= \frac{x(1+x)(1-x^n) - 2x^3(1-x^{2n})}{(1-x)(1+x)}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x) \\ &= \frac{x(1+x) - 2x^3}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{x(1-x)(2x+1)}{(1-x)(1+x)} \\ &= \frac{2x^2+x}{1+x}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned}f(x) &= 1 - 2x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \\ &= \frac{(1+x)(1-2x) + 2x^2 + x}{1+x} \\ &= \frac{1}{1+x}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \frac{1}{1+x}$$

(2)

$$g(1) = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \frac{1}{2}$$

である。したがって, $0 \leq x \leq 1$ において,

$$g(x) = \frac{1}{1+x}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g(x) dx &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= [\log(1+x)]_0^1 \\ &= \log 2\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad g(1) = \frac{1}{2}, \int_0^1 g(x) dx = \log 2$$

(3)

n は自然数であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 u_n(x) dx &= \int_0^1 (x^n - 2x^{2n+1}) dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - 2 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} \\ &= 0\end{aligned}$$

と求まる。また,

$$\begin{aligned}u_n(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^n - 2x^{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^n(1 - 2x^{n+1}) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2^{-\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 |u_n(x)| dx &= \int_0^{2^{-\frac{1}{n+1}}} u_n(x) dx - \int_{2^{-\frac{1}{n+1}}}^1 u_n(x) dx \\ &= \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - 2 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^{2^{-\frac{1}{n+1}}} - \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} - 2 \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_{2^{-\frac{1}{n+1}}}^1 \\ &= \left(\frac{2^{-\frac{n+1}{n+1}}}{n+1} - \frac{2 \cdot 2^{-\frac{2n+2}{n+1}}}{n+1} \right) \times 2 \\ &= (2^{-1} - 2^{-2}) \cdot \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{1}{2n+2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^1 u_n(x) dx = 0, \int_0^1 |u_n(x)| dx = \frac{1}{2n+2}$$

(4)

(a)

$$u_n'(x) = nx^{n-1} - 2(2n+1)x^{2n}$$

であるから,

$$\begin{aligned}u_n'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow nx^{n-1} - 2(2n+1)x^{2n} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^{n-1} \{n - 2(2n+1)x^{n+1}\} &= 0 \\ \therefore x &= 0, \left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}\end{aligned}$$

と求まる。したがって, $u_n(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	0	...	$\left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$	...	1
$u_n'(x)$	0	+	0	-	
$u_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-1

したがって,

$$\alpha_n = \left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha_n = \left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{1}{n+1}}$$

(b)

(a)より,

$$\begin{aligned}\log \alpha_n &= \frac{1}{n+1} \log \frac{n}{4n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \log \frac{1}{4 + \frac{2}{n}}\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \log \alpha_n &= 0 \cdot \log \frac{1}{4} \\ &= 0\end{aligned}$$

と求まる。したがって, 対数関数の連続性により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \log \alpha_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 1$$

(c)

$$(\alpha_n)^n = \left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{n}{n+1}}, (\alpha_n)^{2n+1} = \left(\frac{n}{4n+2} \right)^{\frac{2n+1}{n+1}}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\log(\alpha_n)^n &= \frac{n}{n+1} \log \frac{n}{4n+2} \\ &= \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \log \frac{1}{4 + \frac{2}{n}}, \\ \log(\alpha_n)^{2n+1} &= \frac{2n+1}{n+1} \log \frac{n}{4n+2} \\ &= \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \log \frac{1}{4 + \frac{2}{n}}\end{aligned}$$

となる。したがって,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log(\alpha_n)^n = \log \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} \log(\alpha_n)^{2n+1} = 2 \log \frac{1}{4}$$

となるので, 対数関数の連続性により,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^{2n+1} = \frac{1}{16}$$

と求まる。

$$M_n = (\alpha_n)^n - 2(\alpha_n)^{2n+1}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} M_n &= \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{16} \\ &= \frac{1}{8}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n = \frac{1}{4}, \lim_{n \rightarrow \infty} M_n = \frac{1}{8}$$

2

(1)

(a)

楕円の方程式に $y = x^2$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\frac{y}{4b^2} + \frac{(y-a)^2}{b^2} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{y}{4b^2} + \frac{(y-a)^2}{b^2} - 1 &= 0\end{aligned}$$

となる。上式に $y = z$ を代入したときの左辺を $f(z)$ と置いているので、 $y \geq 0$ より、

$$z \geq 0$$

である。したがって、 $z \geq 0$ における $f(z) = 0$ の解を求めれば、楕円と放物線の交点の座標が分かる。 $z = y = x^2$ なので、 $z = 0$ のとき、この解に対応する放物線と楕円の共有点は1個であり、 $z > 0$ のとき、この解に対応する共有点は2個である。以上をもとに (m, k) を考える。

$f(0) = 0$ のとき、

$$\begin{aligned}f(0) &= \frac{a^2}{b^2} - 1 = 0 \\ \therefore a^2 &= b^2\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{z}{4a^2} + \frac{(z-a)^2}{a^2} - 1 \\ &= \frac{1}{a^2}z^2 + \frac{1-8a}{4a^2}z \\ &= \frac{1}{4a^2}z\{4z + (1-8a)\}\end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}f(z) &= 0 \\ \therefore z &= 0, 2a - \frac{1}{4}\end{aligned}$$

と求まる。 a は任意の正の実数であるから、

$$-\frac{1}{4} < 2a - \frac{1}{4}$$

である。したがって、 $f(z) = 0$ は、 a の値によって、正の解を持つ場合と持たない場合がある。

したがって、

$$m = 0, 1$$

である。したがって、上の考察より、

$$(m, k) = (0, 1), (1, 3)$$

である。

(答) $(m, k) = (0, 1), (1, 3)$

(b)

$f(0) \neq 0$ のとき、 $f(z) = 0$ は、 $z = 0$ の解を持たない。したがって、このとき、

$$k = m \times 2$$

である。したがって、 m の取りうる値を求めればよい。

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{b^2}z^2 + \frac{1-8a}{4b^2}z + \frac{a^2}{b^2} - 1 \\ &= \frac{1}{b^2}\left\{z^2 + \left(\frac{1}{4} - 2a\right)z + (a^2 - b^2)\right\} \\ &= \frac{1}{b^2}\left\{\left(z - a + \frac{1}{8}\right)^2 - b^2 + \frac{1}{4}a - \frac{1}{64}\right\} \\ &= \frac{1}{b^2}\left(z - a + \frac{1}{8}\right)^2 + \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1\end{aligned}$$

であるから、放物線 $w = f(z)$ の頂点の座標は、

$$\left(a - \frac{1}{8}, \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1\right)$$

である。したがって、

$$f(0) = \frac{a^2}{b^2} - 1 > 0, a - \frac{1}{8} > 0, \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 < 0$$

のとき、 $m = 2$ であり、

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 < 0 \quad \text{または} \quad \frac{a^2}{b^2} - 1 > 0, a - \frac{1}{8} > 0, \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 = 0$$

のとき、 $m = 1$ であり、

$$\frac{a^2}{b^2} - 1 > 0, a - \frac{1}{8} < 0 \quad \text{または} \quad \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 > 0$$

のとき、 $m = 0$ である。したがって、

$$m = 0, 1, 2$$

である。このとき、

$$(m, k) = (0, 0), (1, 2), (2, 4)$$

と求まる。

(答) $(m, k) = (0, 0), (1, 2), (2, 4)$

(2)

(a)

(1)(a)より、 $a = b$ のとき、

$$f(0) = 0$$

である。したがって、このとき $f(z) = 0$ が正の解をもつ条件は、

$$\begin{aligned}2a - \frac{1}{4} &> 0 \\ \therefore a &> \frac{1}{8}\end{aligned}$$

である。

(答) $a > \frac{1}{8}$

(b)

(1)より、 $k = 3$ となるためには、

$$m = 1$$

となればよい。したがって、 $a = b$ のとき、 $m = 1$ となる条件は、

$$a > \frac{1}{8}$$

である。また、 $k = 1$ となるためには、

$$m = 0$$

となればよい。したがって、 $a = b$ のとき、 $m = 0$ となる条件は、

$$\begin{aligned}2a - \frac{1}{4} &\leq 0 \\ \therefore a &\leq \frac{1}{8}\end{aligned}$$

である。

(答) $k = 3$ となる a の範囲: $a > \frac{1}{8}$, $k = 1$ となる a の範囲: $a \leq \frac{1}{8}$

(3)

(a)

$a < b$ のとき、 $f(0) = \frac{a^2}{b^2} - 1 < 0$ であるから、 $f(z) = 0$ は異なる正の解と異なる負の解をそれぞれ1個ずつ持つ。

(答) 正の解: 1個, 負の解: 1個

(b)

$a < b$ のとき、

$$f(0) \neq 0$$

で、(3)(a)より、 $m = 1$ であるから、このとき、

$$k = 2$$

である。

(答) $k = 2$

(4)

(a)

$a > b$ のとき、 $f(0) > 0$ であるので、放物線 $w = f(z)$ の頂点 $\left(a - \frac{1}{8}, \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1\right)$ の x 座標が負のとき、 $f(z) = 0$ は正の解を持たない。したがって、

$$a - \frac{1}{8} > 0$$

である。このとき、 $f(z) = 0$ が正の解をただ1つ持つためには、

$$\frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 = 0$$

であることが必要である。このとき、 $f(z) = 0$ は重解 $z = a - \frac{1}{8}$ を持つ。以上より、 $f(z) = 0$ が正の解をただ1つ持つとき、その解は重解であることが示された。

(証明終)

(b)

$a > b$ のとき

$$f(0) \neq 0$$

であるから、(1)(b)より、 $k = 2$ のとき、

$$m = 1$$

である。したがって、 $m = 1$ となる条件を求めればよい。(4)(a)より、 $m = 1$ となるとき、

$$a - \frac{1}{8} > 0, \frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 = 0$$

となる。したがって、

$$a > \frac{1}{8}$$

であり、

$$\begin{aligned}\frac{a}{4b^2} - \frac{1}{64b^2} - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow 16a - 1 - 64b^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow b^2 &= \frac{1}{64}(16a - 1) \\ \therefore b &= \frac{1}{8}\sqrt{16a - 1} \quad (\because b > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $a > \frac{1}{8}, b = \frac{1}{8}\sqrt{16a - 1}$