

【1】

- (1) ア 2
イ, ウ 5, 2
エオカ, キ 113, 8
クケ 14
(2) ア, イウ, エオ 7, 13, 13
カ, キク, ケコ 2, 13, 13
サシ 13
ス, セ, ソ 2, 6, 2
タ, チ, ツ, テト 3, 2, 6, 12
ナ, ニ, ヌ, ネ 3, 2, 3, 6
(3) ア, イ, ウ, エ 1, 2, 3, 2
オ, カ, キ, ク 3, 2, 1, 2
ケ, コ, サ 2, 3, 3
シ, ス, セ 2, 3, 3
ソ, タ 3, 3
チ, ツ, テ 3, 3, 3

【解説】

(1)

- (a)
まず, $3^x = A$ とすると,

$$-\frac{3}{2} \leq 3^x - 3^{-x} \leq \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow -3A \leq 2A^2 - 2 \leq 3A$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A \leq -2, A \geq \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \leq A \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq A \leq 2$$
となる。また,

$$f(A) = A + \frac{1}{A}$$

とすると,

$$f'(A) = 1 - \frac{1}{A^2} < 0$$

であるので, $y = f(A)$ の増減表は下表のようになる。

A	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
$f'(A)$		-	0	+	
$f(A)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで,

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2)$$

であるので,

$$f(1) \leq 3^x + 3^{-x} \leq f(2)$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq 3^x + 3^{-x} \leq \frac{5}{2}$$

である。

(b)

$$2 \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{-x} - 3^{x+2} - 3^{-x+2}$$

$$= 2\left\{(3^x + 3^{-x})^2 - 2\right\} - 9(3^x + 3^{-x}) \cdots \cdots \textcircled{1}$$

となるので, $3^x + 3^{-x} = B$ とすると, $\textcircled{1}$ は,

$$2B^2 - 9B - 4$$

$$= 2\left(B - \frac{9}{4}\right)^2 - \frac{113}{8}$$

となる。ここで, (a)の結果より,

$$2 \leq B \leq \frac{5}{2}$$

であるので,

$$-\frac{113}{8} \leq 2 \cdot 9^x + 2 \cdot 9^{-x} - 3^{x+2} - 3^{-x+2} \leq -14$$

となる。

(2)

- (a)
まず, y を定数とみなすと,

$$x^2 - 6yx + 12y^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 3y \pm \sqrt{1 - 3y^2} \cdots \cdots \textcircled{1}$$
となる。よって,

$$z = x + 3y$$

$$\leq 3y + \sqrt{1 - 3y^2} + 3y$$

$$= 6y + \sqrt{1 - 3y^2} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2}$ を $g(y)$ とする。ここで, $\textcircled{1}$ より,

$$0 < y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

である。

$$g'(y) = 6 + \frac{-6y}{2\sqrt{1 - 3y^2}}$$

$$= 6 \cdot \frac{2\sqrt{1 - 3y^2} - y}{2\sqrt{1 - 3y^2}}$$

となるので,

$$g'(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \pm \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

である。 $\textcircled{3}$ に注意すると, $g(y)$ の増減表は下表のようになる。

y	0	$\cdots$	$\frac{2\sqrt{13}}{13}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$g'(y)$		+	0	-	
$g(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, $z = x + 3y$ は,

$$y = \frac{2\sqrt{13}}{13}$$

のとき, 最大値

$$\sqrt{13}$$

となる。このとき,

$$x = 3y + \sqrt{1 - 3y^2}$$

$$= \frac{7}{13} \times \sqrt{13}$$

である。

(b)

$\textcircled{1}$ より,

$$z = 3y^2 \pm y\sqrt{1 - 3y^2}$$

であり, y は正の実数なので,

$$z = 3y^2 + y\sqrt{1 - 3y^2}$$

が z の最大値となる。この右辺を $h(y)$ とすると,

$$h'(y) = 6y + \sqrt{1 - 3y^2} + \frac{y \cdot (-6y)}{2\sqrt{1 - 3y^2}}$$

$$= \frac{6y\sqrt{1 - 3y^2} - 6y^2 + 1}{\sqrt{1 - 3y^2}}$$

となるので,

$$h'(y) = 0$$

$$\Leftrightarrow 6y\sqrt{1 - 3y^2} = 6y^2 - 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。ここで, $\textcircled{1}$ より $\textcircled{4}$ の左辺は正であるので, $\textcircled{4}$ が成り立つためには右辺も正であることが必要である。よって, $h'(y) = 0$ においては,

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \leq y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。このとき, $\textcircled{4}$ は,

$$144y^4 - 48y^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{24} \quad (\because \textcircled{5})$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12} \quad (\because \textcircled{5})$$

となる。よって, $h(y)$ の増減表は下表のようになる。

y	0	$\cdots$	$\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$h'(y)$		+	0	-	
$h(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって, $z = xy$ は,

$$y = \frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{12}$$

のとき, 最大値

$$\frac{3 + 2\sqrt{3}}{6}$$

をとる。

(3)

(a)

点 Q の座標を (a_p, b) とする。

$$OP = \sqrt{1 + p^2}$$

であるので,

$$a_p^2 + b^2 = 1 + p^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また, $\angle POQ = \frac{\pi}{3}$ であるので,

$$\cos \frac{\pi}{3} = \frac{\overline{OP} \cdot \overline{OQ}}{|\overline{OP}| |\overline{OQ}|}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{a_p + pb}{\sqrt{1 + p^2} \sqrt{a_p^2 + b^2}}$$

となり, $\textcircled{1}$ を代入すると,

$$a_p = \frac{1 + p^2}{2} - pb \cdots \cdots \textcircled{2}$$

となる。 $\textcircled{2}$ を $\textcircled{1}$ に代入すると,

$$\frac{p^4 + 2p^2 + 1}{4} - (p + p^3)b + p^2b^2 + b^2 = 1 + p^2$$

$$\Leftrightarrow (1 + p^2)b^2 - p(1 + p^2)b + \frac{(1 + p^2)(p^2 - 3)}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow b^2 - pb + \frac{p^2 - 3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{p \pm \sqrt{p^2 - (p^2 - 3)}}{2}$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{p \pm \sqrt{3}}{2}$$

となる。ここで, $b = \frac{p - \sqrt{3}}{2}$ のとき, $0 \leq b \leq a$ であることより, $\sqrt{3} \leq p$ となる。ここで,

$$a_p = \frac{1 + \sqrt{3}p}{2} \geq 2$$

となり, 長方形 $OABC$ から外れるので, 点 Q の座標は,

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}p, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}p\right)$$

である。

(b)

点 Q が線分 BC 上にあるので,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}p = a$$

$$\Leftrightarrow p = 2a - \sqrt{3}$$

である。よって,

$$a_p = 2 - \sqrt{3}a$$

となり, $0 \leq a_p \leq 1$ より,

$$0 \leq 2 - \sqrt{3}a \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \leq a \leq \frac{2}{3} \times \sqrt{3}$$

となるので, a のとりうる値の最大値は,

$$\frac{2}{3} \times \sqrt{3}$$

である。

(c)
 $\triangle OPQ$ の面積を S とすると,

$$S = \frac{1}{2} \times \sqrt{a_p^2 + b^2} \times \sqrt{1 + p^2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + p^2) \cdots \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで, (a)の結果より,

$$0 \leq \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}p \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{3}} \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$$

となり, また,

$$0 \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}p \leq a$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{3} \leq p \leq 2a - \sqrt{3}$$

となる。よって,

$$[1] \quad 2a - \sqrt{3} > \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a > \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$\textcircled{3}$ より,

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right\} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

である。

$$[2] \quad 1 < a \leq \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \text{ のとき}$$

$\textcircled{3}$ より,

$$S \leq \frac{\sqrt{3}}{4} \{ 1 + (2a - \sqrt{3})^2 \} = \sqrt{3}a^2 - 3a + \sqrt{3}$$

である。

以上, [1], [2]より, $\triangle OPQ$ の面積の最大値は,

$$a > \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \text{ のとき, } \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ であり,}$$

$$1 < a \leq \frac{2}{3} \times \sqrt{3} \text{ のとき, } \sqrt{3}a^2 - 3a + \sqrt{3}$$

である。

(1)

$$\begin{aligned}
& \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-\cos 4x} \, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{1-(2\cos^2 2x-1)} \, dx \\
&= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{2(1-\cos^2 2x)} \, dx \\
&= \sqrt{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sqrt{\sin^2 2x} \, dx \\
&= \sqrt{2} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \sin 2x \, dx \right) \\
&= \sqrt{2} \left(-\left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\frac{1}{2} \cos 2x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi} \right) \\
&= \sqrt{2} \left(1 + \frac{1}{2} \right) \\
&= \frac{3\sqrt{2}}{2}
\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

(2)

$$f(x) = (x-3)^2 - 7$$

となる。よって、

$$[1] \quad t+1 < 3 \Leftrightarrow t < 2 \text{ のとき}$$

$$g(t) = f(t+1) = t^2 - 4t - 3$$

である。

$$[2] \quad t \leq 3 \text{ かつ } t+1 \geq 3 \Leftrightarrow 2 \leq t \leq 3 \text{ のとき}$$

$$g(t) = f(3) = -7$$

である。

$$[3] \quad t > 3 \text{ のとき}$$

$$g(t) = f(t) = t^2 - 6t + 2$$

である。

$$(\text{答}) \quad t < 2 \text{ のとき } g(t) = t^2 - 4t - 3$$

$$2 \leq t \leq 3 \text{ のとき } g(t) = -7$$

$$t > 3 \text{ のとき } g(t) = t^2 - 6t + 2$$

3

(1)

$$y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

$$y' = x$$

であるので、放物線上の点 $\left(t, \frac{1}{2}(t^2 + 1)\right)$ における接線は、

$$y = t(x - t) + \frac{1}{2}(t^2 + 1)$$

$$= tx + \frac{1}{2}(-t^2 + 1) \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。ここで、点 P を通ることと、 $t = \alpha$ を代入すると、

$$0 = \alpha p + \frac{1}{2}(-\alpha^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad p = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$$

(2)

①に点 P の座標を代入すると、

$$t^2 - 2pt - 1 = 0$$

となり、 α と β はこの方程式の 2 解であるので、

$$\alpha\beta = -1$$

$$\Leftrightarrow \beta = -\frac{1}{\alpha}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \beta = -\frac{1}{\alpha}$$

(3)

$$\begin{cases} \overline{\text{PA}} = \left(\alpha - p, \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1)\right) \\ \overline{\text{PB}} = \left(\beta - p, \frac{1}{2}(\beta^2 + 1)\right) \end{cases}$$

であるので、(1)と(2)を代入すると、

$$\begin{cases} \overline{\text{PA}} = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}, \frac{1}{2}(\alpha^2 + 1)\right) \\ \overline{\text{PB}} = \left(-\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}, \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha^2}\right) \end{cases}$$

となる。また、

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{\text{PA}}|^2 |\overline{\text{PB}}|^2 - (\overline{\text{PA}} \cdot \overline{\text{PB}})^2}$$

である。ここで、

$$\begin{cases} |\overline{\text{PA}}|^2 = (\alpha^2 + 1)^3 \cdot \frac{1}{4\alpha^2} \\ |\overline{\text{PB}}|^2 = (\alpha^2 + 1)^3 \cdot \frac{1}{4\alpha^4} \\ \overline{\text{PA}} \cdot \overline{\text{PB}} = 0 \end{cases}$$

であるので、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times (\alpha^2 + 1)^3 \times \frac{1}{4\alpha^3} \\ &= \frac{(\alpha^2 + 1)^3}{8\alpha^3} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{(\alpha^2 + 1)^3}{8\alpha^3}$$