

1

【解答】

- (1) ア 0 イ 1 ウ 6 エ 2 オ 3
 カ 2 キ 1 ク 5
 (2) ア 1 イ 3 ウ 5 エ 2 オ 2
 (3) ア 4 イ 6 ウ 4 エ 4 オ 0
 カ 9 キ 6 ク 7 ケ 2 コ 9

【解説】

- (1) 直線 L 、放物線 C の方程式から y を消去すると

$$2(2x+1)^2 = a(x+1) \\ \Leftrightarrow 8x^2 + (8-a)x + 2-a = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。直線 L と放物線 C が異なる 2 点で交わるのは、2 次方程式①が相異なる 2 つの実数解を持つときである。判別式を D とすると

$$D = (8-a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (2-a) \\ = a^2 + 16a \\ = a(a+16)$$

となる。したがって直線 L と放物線 C が異なる 2 点で交わるのは

$$D > 0 \\ \therefore a < -16, 0 < a \quad \cdots \textcircled{2}$$

のときである。

①の 2 つの解を α, β とする。このとき、解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = \frac{a}{8} - 1 \\ \alpha\beta = \frac{2-a}{8}$$

となる。 $\triangle OPQ$ が直角三角形になるのは $\angle POQ = 90^\circ$ または $\angle OPQ = 90^\circ$ のときであるのでいずれが成り立つかで場合分けして考える。

[1] $\angle POQ = 90^\circ$ のとき

このとき

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 2\alpha+1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} \beta \\ 2\beta+1 \end{pmatrix}$$

であるので

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = \alpha\beta + (2\alpha+1)(2\beta+1) \\ = 5\alpha\beta + 2(\alpha+\beta) + 1 \\ = \frac{10-5a}{8} + \frac{2a}{8} - 2 + 1 \\ = -\frac{3}{8}a + \frac{1}{4}$$

となる。したがって $\angle POQ = 90^\circ$ であるための条件は

$$-\frac{3}{8}a + \frac{1}{4} = 0 \\ \therefore a = \frac{2}{3}$$

である (②を満たす)。

[2] $\angle OPQ = 90^\circ$ のとき

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PO} = \begin{pmatrix} \beta-\alpha \\ 2(\beta-\alpha) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha \\ -2\alpha-1 \end{pmatrix} \\ = (\beta-\alpha)(-5\alpha-2) = 0 \\ \therefore \alpha = -\frac{2}{5} \quad (\because \alpha \neq \beta)$$

である。ここで、②のもとでは $\alpha = \frac{a-8 \pm \sqrt{a(a+16)}}{16}$ より、

$$\alpha = -\frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \pm \sqrt{a(a+16)} = -a + \frac{8}{5} \\ \Rightarrow a(a+16) = \left(-a + \frac{8}{5}\right)^2 \\ \Leftrightarrow a = \frac{2}{15}$$

となる (②を満たす)。

以上より求める a の値は、 $a = \frac{2}{3}, \frac{2}{15}$ である。

(2)

$$f(x) = \int_0^x (2x+3t) \sin t dt \\ = 2x \int_0^x \sin t dt + 3 \int_0^x t \sin t dt$$

となる。ここで

$$\int_0^x \sin t dt = [-\cos t]_0^x \\ = 1 - \cos x$$

$$\int_0^x t \sin t dt = [-t \cos t]_0^x + \int_0^x \cos t dt \\ = -x \cos x + \sin x$$

であるので

$$f(x) = 2x(1 - \cos x) + 3(-x \cos x + \sin x) \\ = 2x - 5x \cos x + 3 \sin x$$

となる。したがって

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \pi + 3$$

となる。また

$$f'(x) = 2 - 5 \cos x + 5x \sin x + 3 \cos x \\ = 2 - 2 \cos x + 5x \sin x$$

となる。したがって

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5}{2} \pi + 2$$

となる。

(3)

与えられた数列の対数をとると

$$\log a_n = \log \left(\frac{1}{n} \sqrt[n]{\frac{(2n)!}{n!}} \right) \\ = \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \log \{2n \cdot (2n-1) \cdots (n+1)\} \\ = n \cdot \frac{1}{n} \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log(n+k) \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \log(n+k) + \log \frac{1}{n} \right\} \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

となる。したがって区分求積法を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \left(1 + \frac{k}{n} \right) \\ = \int_0^1 \log(1+x) dx \\ = [(1+x) \log(1+x) - (1+x)]_0^1 \\ = 2 \log 2 - 1 \\ = \log \frac{4}{e}$$

となる。したがって対数関数の連続性より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{4}{e}$$

となる。同様に

$$\log b_n = \log \left(\frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(4n)!}{2n!}} \right) \\ = 2 \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \log \{4n \cdot (4n-1) \cdots (2n+1)\} \\ = 2 \log \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log(2n+k) \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \left(2 + \frac{k}{n} \right)$$

となるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \log \left(2 + \frac{k}{n} \right) \\ = \int_0^2 \log(2+x) dx \\ = [(2+x) \log(2+x) - (2+x)]_0^2 \\ = 6 \log 2 - 2 \\ = \log \frac{64}{e^2}$$

となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{64}{e^2}$$

となる。また

$$\log c_n = \log \left(\sqrt[n]{\frac{(8n)!}{(4n)!} \cdot \frac{(2n)!}{(6n)!}} \right) \\ = \frac{1}{n} \log \frac{(8n)(8n-1) \cdots (6n+1)}{(4n)(4n-1) \cdots (2n+1)} \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \{ \log(6n+k) - \log(2n+k) \} \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \{ \log(6n+k) - \log n + \log n - \log(2n+k) \} \\ = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ \log \left(6 + \frac{k}{n} \right) - \log \left(2 + \frac{k}{n} \right) \right\}$$

となるので

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\log c_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} \left\{ \log \left(6 + \frac{k}{n} \right) - \log \left(2 + \frac{k}{n} \right) \right\} \\ = \int_0^2 \{ \log(6+x) - \log(2+x) \} dx \\ = [(6+x) \log(6+x) - (6+x) - (x+2) \log(x+2) + (x+2)]_0^2 \\ = 12 \log 2 - 6 \log 3 \\ = \log \frac{4096}{729}$$

となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{4096}{729}$$

となる。

2

(1)

(a)

$$\begin{aligned}
 3 &= \tan^2 y \\
 \Leftrightarrow \tan y &= -\sqrt{3} \quad \left(\because \frac{\pi}{2} < y < \pi \Rightarrow \tan y < 0 \right) \\
 \therefore y &= \frac{2}{3}\pi
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \frac{2}{3}\pi$$

(b)

 $\tan y < 0, x = \tan^2 y > 0$ より,

$$\tan y = -\sqrt{x} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また $x = \tan^2 y$ より

$$\begin{aligned}
 \cos^2 y &= \frac{1}{1 + \tan^2 y} \\
 &= \frac{1}{1 + x}
 \end{aligned}$$

となる。①の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2\sqrt{x}} &= \frac{1}{\cos^2 y} \frac{dy}{dx} \\
 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} &= -\frac{\cos^2 y}{2\sqrt{x}} \\
 \therefore \frac{dy}{dx} &= -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}
 \end{aligned}$$

となる。この両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{-2\left\{\sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}(1+x)\right\}}{4x(1+x)^2} \\
 &= \frac{3x+1}{4x(x+1)^2\sqrt{x}}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}(1+x)}, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{3x+1}{4x(x+1)^2\sqrt{x}}$$

(2)

 $a = \sqrt[n]{5}$ とおく。このとき

$$x = \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right)$$

である。したがって

$$\begin{aligned}
 x^2 + 1 &= \frac{1}{4} \left(a^2 - 2 + \frac{1}{a^2} \right) + 1 \\
 &= \frac{1}{4} \left(a^2 + 2 + \frac{1}{a^2} \right) \\
 &= \left\{ \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) \right\}^2
 \end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}
 x + \sqrt{x^2 + 1} &= \frac{1}{2} \left(a + \frac{1}{a} \right) + \frac{1}{2} \left(a - \frac{1}{a} \right) \\
 &= a
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}
 \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right)^n &= a^n \\
 &= 5
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5

(1)

$F_1(\sqrt{3}, 0), F_2(-\sqrt{3}, 0)$ としてよい。 (α, β) が楕円 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上の点であることより

$$\frac{\alpha^2}{5} + \frac{\beta^2}{2} = 1$$

$$\therefore \beta^2 = 2 - \frac{2}{5}\alpha^2 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $\beta^2 \geq 0$ より,

$$0 \leq \alpha^2 \leq 5 \quad \dots \textcircled{2}$$

であることに注意して、①より,

$$\begin{aligned} PF_1 \cdot PF_2 &= \sqrt{(\sqrt{3} - \alpha)^2 + \beta^2} \sqrt{(\sqrt{3} + \alpha)^2 + \beta^2} \\ &= \sqrt{\beta^4 + 2(\alpha^2 + 3)\beta^2 + (\alpha^2 - 3)^2} \\ &= \sqrt{(\alpha^2 - 3)^2 + 2\left(2 - \frac{2}{5}\alpha^2\right)(\alpha^2 + 3) + \left(2 - \frac{2}{5}\alpha^2\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{9}{25}\alpha^4 - 6\alpha^2 + 25} \\ &= \sqrt{\left(5 - \frac{3}{5}\alpha^2\right)^2} \\ &= 5 - \frac{3}{5}\alpha^2 \quad \left(\because 5 - \frac{3}{5}\alpha^2 > 0\right) \end{aligned}$$

となる。また、 $\overrightarrow{PF_1} = (-\sqrt{3} - \alpha, -\beta)$, $\overrightarrow{PF_2} = (\sqrt{3} - \alpha, -\beta)$ より,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} &= \alpha^2 - 3 + \beta^2 \\ &= \alpha^2 - 3 + \left(2 - \frac{2}{5}\alpha^2\right) \\ &= \frac{3}{5}\alpha^2 - 1 \end{aligned}$$

である。

(a)

$$\begin{aligned} \theta &> \frac{\pi}{2} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} &< 0 \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5}\alpha^2 - 1 &< 0 \\ \therefore -\frac{\sqrt{15}}{3} < \alpha &< \frac{\sqrt{15}}{3} \end{aligned}$$

となる (②を満たす)。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{15}}{3} < \alpha < \frac{\sqrt{15}}{3}$$

(b)

$$\begin{aligned} \theta &< \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{PF_1} \cdot \overrightarrow{PF_2} &> PF_1 \cdot PF_2 \cos \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{3}{5}\alpha^2 - 1 &> \left(5 - \frac{3}{5}\alpha^2\right) \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &> \frac{35}{9} \end{aligned}$$

となる。したがって②より

$$-\sqrt{5} \leq \alpha < -\frac{\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{\sqrt{35}}{3} < \alpha \leq \sqrt{5}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad -\sqrt{5} \leq \alpha < -\frac{\sqrt{35}}{3}, \quad \frac{\sqrt{35}}{3} < \alpha \leq \sqrt{5}$$

(2)

$PF_1 + PF_2 = 2\sqrt{5}$ より、与えられた関係式を変形すると

$$\begin{aligned} |PF_2 - PF_1| &< 3 \\ \Leftrightarrow (PF_2 - PF_1)^2 &< 9 \\ \Leftrightarrow (PF_1 + PF_2)^2 - 4PF_1 \cdot PF_2 &< 9 \\ \Leftrightarrow 20 - 4\left(5 - \frac{3}{5}\alpha^2\right) &< 9 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 &< \frac{15}{4} \end{aligned}$$

となる。よって

$$-\frac{\sqrt{15}}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{15}}{2}$$

となる (②を満たす)。

$$(\text{答}) \quad -\frac{\sqrt{15}}{2} < \alpha < \frac{\sqrt{15}}{2}$$