

1

(1) ア 5 イ 5 ウ 2 エ 5 オ 2

(2) カ 1 キ 3 ク 2 ケ 3 コ 1

【解説】

(1)

点 (n, a_n) はすべて直線 $y = -5x + k$ の上にあることから、

$$a_n = -5n + k$$

が成り立つ。よって、数列 $\{a_n\}$ は公差 -5 の等差数列である。

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (-5i + k) \\ &= \frac{1}{n^2} \left\{ -5 \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + kn \right\} \\ &= -\frac{5}{2} + \frac{1}{n} \left(k - \frac{5}{2} \right) \end{aligned}$$

であることから、 $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i$ の値が n によらず一定となるのは $k = \frac{5}{2}$ のときであり、その値は $-\frac{5}{2}$ である。

(2)

点 $(n, \log_2 b_n)$ はすべて直線 $y = -5x + l$ の上にあることから、

$$\log_2 b_n = -5n + l$$

$$\Leftrightarrow b_n = 2^{-5n+l} = 2^{l-5} \cdot \left(\frac{1}{32} \right)^{n-1}$$

が成り立つ。よって、数列 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{1}{32}$ の等比数列である。

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n b_i &= \sum_{i=1}^n \left\{ 2^{l-5} \cdot \left(\frac{1}{32} \right)^{i-1} \right\} \\ &= \frac{2^{l-5} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{32} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{32}} \\ &= \frac{2^l}{31} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{32} \right)^n \right\} \end{aligned}$$

であることから、 $\sum_{i=1}^n b_i \leq 1$ がすべての n に対して成り立つためには

$$\frac{2^l}{31} \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 2^l \leq 31$$

$$\Leftrightarrow l \leq \log_2 31$$

であることが必要十分である。

[解答]

- (1) ア 1 イ 3 ウ 2 エ 1 オ 6 カ 5
 (2) (a) キ 7 ク 9
 (b) ケ 2 コ 6 サ 2 シ 2 ス 6 セ 2

[解説]

(1)

$0 \leq r \leq n-1$ のとき $r+1 > 0$ かつ $n-r > 0$ であるので

$$\begin{aligned}
 f_n(r) &< f_n(r+1) \\
 &\Leftrightarrow f_n(r+1) - f_n(r) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{4^{r+1} \cdot 2^{n-r-1}}{(r+1)!(n-r-1)!} - \frac{4^r \cdot 2^{n-r}}{r!(n-r)!} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{4^r \cdot 2^{n-r-1}}{r!(n-r-1)!} \left(\frac{4}{r+1} - \frac{2}{n-r} \right) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{r+1} - \frac{1}{n-r} > 0 \\
 &\Leftrightarrow 2(n-r) > r+1 \\
 &\therefore r < \frac{1}{3}(2n-1)
 \end{aligned}$$

となる。すなわち $f_n(r) < f_n(r+1)$ であるための必要十分条件は $r < \frac{1}{3}(2n-1)$ となる。同様に

$$\begin{aligned}
 g_n(r) &< g_n(r+1) \\
 &\Leftrightarrow g_n(r+1) - g_n(r) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{5^{r+1}}{(r+1)!(n-r-1)!} - \frac{5^r}{r!(n-r)!} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{5^r}{r!(n-r-1)!} \left(\frac{5}{r+1} - \frac{1}{n-r} \right) > 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{5}{r+1} - \frac{1}{n-r} > 0 \\
 &\Leftrightarrow 5(n-r) > r+1 \\
 &\therefore r < \frac{1}{6}(5n-1)
 \end{aligned}$$

すなわち $g_n(r) < g_n(r+1)$ であるための必要十分条件は $r < \frac{1}{6}(5n-1)$ である。

(2)

(a)

(1) のより、 $n=10$ のとき $f_{10}(r) < f_{10}(r+1)$ であるための必要十分条件は

$$r < \frac{19}{3}$$

である。したがって r が 0 以上 10 以下の整数であることより

$$\begin{aligned}
 r=0, 1, \dots, 6 \text{ のとき } f_{10}(r) &< f_{10}(r+1) \\
 r=7, 8, \dots, 10 \text{ のとき } f_{10}(r) &> f_{10}(r+1)
 \end{aligned}$$

である。したがって

$$f_{10}(0) < f_{10}(1) < \dots < f_{10}(7), f_{10}(7) > \dots > f_{10}(10)$$

となる。よって $f_{10}(r)$ は $r=7$ で最大となる。

同様に(1)の結果より $g_{10}(r) < g_{10}(r+1)$ であるための必要十分条件は

$$r < \frac{49}{6}$$

である。したがって r が 0 以上 10 以下の整数であることより

$$\begin{aligned}
 r=0, 1, \dots, 8 \text{ のとき } g_{10}(r) &< g_{10}(r+1) \\
 r=9, 10 \text{ のとき } g_{10}(r) &> g_{10}(r+1)
 \end{aligned}$$

である。したがって

$$g_{10}(0) < g_{10}(1) < \dots < g_{10}(9), g_{10}(9) > g_{10}(10)$$

となる。よって $g_{10}(r)$ は $r=9$ で最大となる。

(b)

二項定理 $(1+a)^N = \sum_{k=0}^N {}_N C_k \cdot a^k$ より

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{10} f_{10}(r) &= \sum_{r=0}^{10} \frac{10!}{r!(10-r)!} \cdot \frac{2^{10+r}}{10!} \\
 &= \frac{2^{10}}{10!} \sum_{r=0}^{10} {}_{10} C_r \cdot 2^r \\
 &= \frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{10!} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 3^6}{5^2 \cdot 7}
 \end{aligned}$$

となる。同様にして

$$\begin{aligned}
 \sum_{r=0}^{10} g_{10}(r) &= \sum_{r=0}^{10} \frac{10!}{r!(10-r)!} \cdot \frac{5^r}{10!} \\
 &= \frac{1}{10!} \sum_{r=0}^{10} {}_{10} C_r \cdot 5^r \\
 &= \frac{6^{10}}{10!} \\
 &= \frac{2^{10} \cdot 3^{10}}{10!} \\
 &= \frac{2^2 \cdot 3^6}{5^2 \cdot 7}
 \end{aligned}$$

となる。

[解答]

- (1) ア, イ 1, 2
 ウ 1
 エ 3
 オ, カ 2, 2
 キ, ク 3, 1
 ケコ 14
 サ, シ 8, 3
 (2) ス, セ, ソ 4, 4, 2

[解説]

(1)

まず, $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{c}$ とすると,

$$\begin{cases} \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \\ |\overrightarrow{a}|^2 = |\overrightarrow{b}|^2 = |\overrightarrow{c}|^2 = 1 \end{cases}$$

であることに注意する。

$$\overrightarrow{OP} = (1-p)\overrightarrow{a} + p\overrightarrow{c}$$

であるので,

$$\overrightarrow{BP} = (1-p)\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + p\overrightarrow{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。また, 実数 q を用いて,

$$BQ : QC = q : 1-q$$

とすると,

$$\overrightarrow{OQ} = (1-q)\overrightarrow{b} + q\overrightarrow{c}$$

となるので,

$$\overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{a} + (1-q)\overrightarrow{b} + q\overrightarrow{c} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

である。①, ②と線分 AQ と線分 BP が直交することより,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p-1)|\overrightarrow{a}|^2 + (q-1)|\overrightarrow{b}|^2 + pq|\overrightarrow{c}|^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p+q+pq &= 2 \\ \Leftrightarrow q &= \frac{2-p}{1+p} \quad \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。ここで点 Q は線分 BC 上にあるので,

$$\begin{aligned} 0 &\leq q \leq 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &\leq p \leq 2 \end{aligned}$$

となる。よって $0 < p < 1$ と合わせると

$$\frac{1}{2} \leq p < 1$$

となる。これが求める必要十分条件である。また, ③より,

$$\begin{aligned} &(p+1)(q+1) \\ &= (p+1) \cdot \frac{3}{p+1} \\ &= 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} PQ^2 &= |(1-p)\overrightarrow{a} - (1-q)\overrightarrow{b} + (p-q)\overrightarrow{c}|^2 \\ &= (1-p)^2 + (1-q)^2 + (p-q)^2 \\ &= 2(p^2 - pq - p + q^2 - q) + 2 \end{aligned}$$

となるが, ④より,

$$pq + p + q = 2$$

であるので,

$$PQ^2 = 2(p^2 + q^2) - 2$$

となる。ここで, 相加相乗平均の公式より, PQ が最小すなわち PQ^2 が最小となるのは, $p > 0$, $q > 0$ より,

$$\begin{aligned} p^2 &= q^2 \\ \Leftrightarrow p &= q \\ \Leftrightarrow p^2 + 2p - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow p &= \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

のときで, このとき,

$$PQ^2 = 14 - 8\sqrt{3}$$

となる。

(2)

まず,

$$E\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), F\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1\right), P(1-p, 0, p)$$

であるので,

$$\overrightarrow{EF} = \left(-\frac{1}{3}, 0, 1\right)$$

となる。また, 実数 s を用いて,

$$BR : RD = s : 1-s$$

とすると, 点 R の座標は $(s, 1, s)$ となる。よって,

$$\overrightarrow{PR} = (s+p-1, 1, s-p)$$

である。ここで, EF と PR の交点を T とし, 実数 m, n を用いて,

$$\begin{cases} \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OE} + m\overrightarrow{EF} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}m, \frac{1}{3}, m\right) \\ \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OP} + n\overrightarrow{PR} = (1-p+n(s+p-1), n, p+n(s-p)) \end{cases}$$

とおく。よって,

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{m}{3} = 1-p+n(s+p-1) \\ \frac{1}{3} = n \\ m = p+n(s-p) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} m = p \\ n = \frac{1}{3} \\ s = p \end{cases} \end{aligned}$$

となるので,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PR} &= (2p-1, 1, 0) \\ \Leftrightarrow PR^2 &= 4p^2 - 4p + 2 \end{aligned}$$

である。

[解答]

- (1) ア, イ 2, 2
 ウ, エ 3, 2
 オ, カ 1, 2
 キ 1
 (3) クケ 17
 コ, サ 7, 8

[解説]

(1)

実数 t を用いて、 $P(t, f(t))$ とする。 C の接線の傾きは、

$$f'(x) = -2x + k$$

となるので、 P における C の法線の式は、

$$y = \frac{1}{2t-k}(x-t) + f(t)$$

となる。この式が、原点を通るので、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{-t}{2t-k} - t^2 + kt \\ \Leftrightarrow 2t^3 - 3kt^2 + (k^2 + 1)t &= 0 \\ \Leftrightarrow t(2t^2 - 3kt + k^2 + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow t \left\{ 2 \left(t - \frac{3}{4}k \right)^2 - \frac{1}{8}k^2 + 1 \right\} &= 0 \end{aligned}$$

となるので、まず $t=0$ を解に持つことが分かる。よって、求める条件は、

$$2 \left(t - \frac{3}{4}k \right)^2 - \frac{1}{8}k^2 + 1 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

が $t=0$ 以外で異なる 2 解をもてばよい。ここで、 $\textcircled{1}$ に $t=0$ を代入すると、

$$k^2 + 1 > 0$$

となるので、求める条件は、

$$-\frac{1}{8}k^2 + 1 < 0$$

$$\Leftrightarrow k > 2\sqrt{2} \quad (\because k > 0)$$

となる。

(2)

(1) より、 a, β は、

$$2t^2 - 3kt + k^2 + 1 = 0$$

の 2 解であるので、

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{3}{2}k \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}(k^2 + 1) \end{cases}$$

である。

(3)

P_1, P_2 における C の法線の傾きは、それぞれ、

$$\frac{1}{2\alpha-k}, \frac{1}{2\beta-k}$$

である。よって、 $\angle P_1OP_2 = 45^\circ$ より、

$$\begin{aligned} \tan 45^\circ &= \frac{\frac{1}{2\alpha-k} - \frac{1}{2\beta-k}}{1 + \frac{1}{2\alpha-k} \cdot \frac{1}{2\beta-k}} \\ \Leftrightarrow 1 &= \frac{2(\beta-\alpha)}{k^2 - 2(\alpha+\beta)k + 4\alpha\beta + 1} \\ \Leftrightarrow k^2 - 2(\alpha+\beta)k + 4\alpha\beta + 1 &= 2\sqrt{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta} \end{aligned}$$

となる。(1) より、 $k > 2\sqrt{2}$ であるため、(2) で求めた式を代入して、

$$\begin{aligned} k^2 - 3k^2 + 2k^2 + 3 &= \sqrt{k^2 - 8} \\ \Leftrightarrow k^2 &= 17 \\ \Leftrightarrow k &= \sqrt{17} \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{\alpha}^{\beta} (-x^2 + kx) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{k}{2}x^2 \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= -\frac{1}{3}(\beta^3 - \alpha^3) + \frac{k}{2}(\beta^2 - \alpha^2) \\ &= -\frac{1}{3}(\beta - \alpha)(\beta^2 + \alpha\beta + \alpha^2) + \frac{k}{2}(\beta - \alpha)(\beta + \alpha) \\ &= -\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \frac{117}{4} + \frac{\sqrt{17}}{2} \cdot 3 \cdot \frac{3}{2}\sqrt{17} \\ &= 9 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}(\beta - \alpha) \cdot (-\alpha^2 + k\alpha - \beta^2 + k\beta) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{21}{4} \\ &= \frac{63}{8} \end{aligned}$$

となるので、

$$\frac{T}{S} = \frac{7}{8}$$

である。