

1

〔解答〕

- (1) ア 9 イ 4 ウ 2 エ 1 オ 2
 (2) カ 9 キ 4 ク 1 ケ 8 コ 1
 サ 0 シ 4
 (3) ス 3 セ 4 ソ 9 タ 1 チ 7

〔解説〕

(1)

C_1 が点 $(-2, 1)$ を通るとき、

$$1 = 4a - 2b + c$$

が成り立つので、 C_1 は、

$$y = ax^2 + bx - 4a + 2b + 1 \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また、 C_2 が点 $(2, -7)$ を通るとき、

$$-7 = 9 + 2p + q$$

が成り立つので、 C_2 は、

$$y = \frac{9}{4}x^2 + px - 2p - 16 \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 C_1 と C_2 が一致するとき、

$$\begin{cases} a = \frac{9}{4} \\ b = p \\ -4a + 2b + 1 = -2p - 16 \end{cases}$$

となればよい。これを解くと、

$$a = \frac{9}{4}, b = p = -2, c = q = -12$$

となる。

(2)

$$\begin{cases} X = 2 - x \\ Y = 1 - y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - X \\ y = 1 - Y \end{cases}$$

であるので、このとき、 Q の軌跡は、

$$\begin{aligned} 1 - Y &= a(2 - X)^2 + b(2 - X) - 4a + 2b + 1 \\ \Leftrightarrow Y &= -aX^2 + (4a + b)X - 4b \end{aligned}$$

と表せる。 Q の軌跡と C_2 が一致する条件は、

$$\begin{cases} -a = \frac{9}{4} \\ 4a + b = p \\ -4b = -2p - 16 \end{cases}$$

であり、これを解くと、

$$(a, b, c, p, q) = \left(-\frac{9}{4}, -1, 8, -10, 4 \right)$$

と求まる。

(3)

(2)より、

$$C_1: y = -\frac{9}{4}x^2 - x + 8 = -\frac{9}{4}\left(x + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{73}{9}$$

$$C_2: y = \frac{9}{4}x^2 - 10x + 4 = \frac{9}{4}\left(x - \frac{20}{9}\right)^2 - \frac{64}{9}$$

であるから、 C_1 と C_2 の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -\frac{9}{4}x^2 - x + 8 &= \frac{9}{4}x^2 - 10x + 4 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}x^2 - 9x - 4 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm \frac{\sqrt{17}}{3} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、求める面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_{1-\frac{\sqrt{17}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{17}}{3}} \left\{ \left(-\frac{9}{4}x^2 - x + 8 \right) - \left(\frac{9}{4}x^2 - 10x + 4 \right) \right\} dx \\ &= -\frac{9}{2} \int_{1-\frac{\sqrt{17}}{3}}^{1+\frac{\sqrt{17}}{3}} \left(x^2 - 2x - \frac{8}{9} \right) dx \\ &= -\frac{9}{2} \left\{ \left(1 + \frac{\sqrt{17}}{3} \right) - \left(1 - \frac{\sqrt{17}}{3} \right) \right\}^3 \\ &= \frac{3}{4} \left(\frac{2}{3} \sqrt{17} \right)^3 \\ &= \frac{34}{9} \sqrt{17} \end{aligned}$$

と求まる。

〔解答〕

- (1) ア 5 イ 1 ウ 2
 (2) エ 5 オ 1 カ 8
 (3) キ 1 ク 3 ケ 6
 (4) コ 2 サ 9

〔解説〕

(1)

大きいサイコロの出た目を b 、小さいサイコロの出た目を c とすると、 $\{a_n\}$ は初項 b 、公比 c の等比数列であるから、

$$a_n = b \cdot c^{n-1}$$

と表せる。

$$a_6 = b \cdot c^5$$

であるから、 a_6 が 6 で割り切れるとき、 b, c の組み合わせは、

$$(b, c) = (1, 6), (2, 3), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 6) \\ (4, 3), (4, 6), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3) \\ (6, 4), (6, 5), (6, 6)$$

の 15 通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

である。

(2)

$$192 = 2^6 \cdot 3$$

であるから、

$$a_{72} = b \cdot c^{71}$$

が 192 で割り切れるとき c は 2 の倍数であることが必要である。

[1] $c = 2$ のとき、

$$b = 3, 6$$

であればよい。

[2] $c = 4$ のとき、

$$b = 3, 6$$

であればよい。

[3] $c = 6$ のとき、

b はいくつでもよい。

[1], [2], [3] より、このときの (b, c) の組み合わせの数は、

$$10 \text{ 通り}$$

である。したがって、求める確率は、

$$\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

と求まる。

(3)

$$3240 = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5$$

であるから、

$$a_{360} = b \cdot c^{359}$$

が 3240 で割り切れるとき、 $c = 6$ のときのみである。このとき、 $b = 5$ のみであるから、求める確率は、

$$\frac{1}{36}$$

である。

(4)

$$\sqrt{a_{360}} = \sqrt{bc} c^{179}$$

であるから、 $\sqrt{bc}$ が整数となればよい。このような (b, c) は、

$$(b, c) = (1, 1), (1, 4), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4), (5, 5), (6, 6)$$

の 8 通りである。したがって、求める確率は、

$$\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$$

である。

3

【解答】

- (1) ア 2 イ 1 ウ 4 エ 3 オ 4 カ 8
 キ 1 ク 8 ケ 1
(2) コ 1 サ 1 シ 1 ス 2 セ 2
(3) ソ 4 タ 1 チ 4 ツ 1 テ 4 ト 5

【解説】

$$\begin{aligned}(1) \quad & f_1(\cos \theta) = \cos 2\theta \\ & \quad = 2\cos^2 \theta - 1 \\ & f_2(\cos \theta) = \cos 3\theta \\ & \quad = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta \\ & f_3(\cos \theta) = \cos 6\theta \\ & \quad = 2\cos^2 3\theta - 1 \\ & \quad = 2(4\cos^3 \theta - 3\cos \theta)^2 - 1 \\ & \quad = 32\cos^6 \theta - 48\cos^4 \theta + 18\cos^2 \theta - 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}f_1(x) &= 2x^2 - 1 \\ f_2(x) &= 4x^3 - 3x \\ f_3(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1\end{aligned}$$

と表せる。

$$(2) \quad -1 \leq x \leq 1 \text{ であるから, } x = \cos \theta \text{ より,}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi$$

とおける。xが条件Cを満たすときxに対応する θ に対して、 $f_1(\cos \theta)$ 、 $f_2(\cos \theta)$ 、 $f_3(\cos \theta)$ のうち少なくとも2つの関数が等しくなる。よって、この条件を満たす θ を求める。和積公式より、

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}$$

である。

$$[1] \quad f_1(\cos \theta) = f_2(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos 3\theta \\ \Leftrightarrow \cos 3\theta - \cos 2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow -2 \sin \frac{5}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \frac{5}{2}\theta = 0 \text{ or } \sin \frac{1}{2}\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{5}{2}\theta = 0, \pi, 2\pi \text{ or } \frac{1}{2}\theta &= 0 \\ \therefore \theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$[2] \quad f_2(\cos \theta) = f_3(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 6\theta \\ \Leftrightarrow -2 \sin \frac{9}{2}\theta \sin \frac{3}{2}\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{9}{2}\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \text{ or } \frac{3}{2}\theta &= 0, \pi \\ \therefore \theta = 0, \frac{2}{9}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{8}{9}\pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$[3] \quad f_3(\cos \theta) = f_1(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= \cos 2\theta \\ \Leftrightarrow -2 \sin 4\theta \sin 2\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 4\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi \text{ or } 2\theta &= 0, \pi, 2\pi \\ \therefore \theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi, \pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$[1], [2], [3] \text{ より, 条件 } C \text{ を満たす } x \text{ に対応する } \theta \text{ は,}$$

$$\theta = 0, \frac{2}{9}\pi, \frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{9}\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{2}{3}\pi, \frac{3}{4}\pi, \frac{4}{5}\pi, \frac{8}{9}\pi, \pi$$

の11個である。したがって、条件Cを満たすxの個数は11個である。

また、 $x = \cos \theta$ であり、 $0 \leq \theta \leq \pi$ であるから、 θ が小さいほどxは大きくなる。よって、3番目に大きいxに対応する θ は、

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

である。したがって、

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

である。

(3)

(2)と同様にして、

$$[1] \quad f_1(\cos \theta) = f_4(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos 4\theta \\ \Leftrightarrow -2 \sin 3\theta \sin \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \text{ or } \theta &= 0, \pi \\ \therefore \theta = 0, \frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi, \pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$[2] \quad f_2(\cos \theta) = f_4(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 3\theta &= \cos 4\theta \\ \Leftrightarrow -2 \sin \frac{7}{2}\theta \sin \frac{1}{2}\theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{2}\theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi \text{ or } \frac{1}{2}\theta &= 0 \\ \therefore \theta = 0, \frac{2}{7}\theta, \frac{4}{7}\theta, \frac{6}{7}\theta\end{aligned}$$

と求まる。

$$[3] \quad f_3(\cos \theta) = f_4(\cos \theta) \text{ のとき,}$$

$$\begin{aligned}\cos 6\theta &= \cos 4\theta \\ -2 \sin 5\theta \sin \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi \text{ or } \theta &= 0, \pi \\ \therefore \theta = 0, \frac{\pi}{5}, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi, \pi\end{aligned}$$

と求まる。

(2)とこれらから、条件Dを満たすxに対応する θ を求める。2つの組を $\{(f_1, f_2), (f_3, f_4)\}$ と表す。

$$[1] \quad \{(f_1, f_2), (f_3, f_4)\} \text{ のとき,}$$

条件を満たす θ は、

$$\theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{4}{5}\pi$$

である。

$$[2] \quad \{(f_1, f_3), (f_2, f_4)\} \text{ のとき,}$$

条件を満たす θ は、

$$\theta = 0$$

のみである。

$$[3] \quad \{(f_1, f_4), (f_2, f_3)\} \text{ のとき,}$$

条件を満たす θ は、

$$\theta = \frac{2}{3}\pi$$

のみである。

$$[1], [2], [3] \text{ より, 条件 } D \text{ を満たす } x \text{ に対応する } \theta \text{ は,}$$

$$\theta = 0, \frac{2}{5}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{5}\pi$$

の4個である。このうちxが最小となるときの θ は、

$$\theta = \frac{4}{5}\pi$$

であり、これは(2)より、 $f_1(x)$ と $f_2(x)$ の交点のうち、最も小さいものである。

$$\begin{aligned}2x^2 - 1 &= 4x^3 - 3x \\ \Leftrightarrow 4x^3 - 2x^2 - 3x + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-1)(4x^2 + 2x - 1) &= 0 \\ \therefore x &= 1, \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

より、条件Dを満たす最小のxは、

$$x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{4}$$

である。

〔解答〕

ア	0	イ	2	ウ	9	エ	3	オ	1
カ	3	キ	2	ク	2	ケ	7	コ	1
サ	3	シ	2	ス	2	セ	7	ソ	1
タ	3	チ	2	ツ	9	テ	3	ト	1
ナ	3								

〔解説〕

$$f'(x) = 3x^2 + p$$

より、 $f'(x) = 0$ が実数解を持つ条件は、

$$p < 0$$

である。このとき、

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm \sqrt{-\frac{p}{3}}$$

であるから、 $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	...	$-\sqrt{-\frac{p}{3}}$	...	$\sqrt{-\frac{p}{3}}$	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗		↘		↗

したがって、 $f(x) = 0$ が 3 つの異なる実数解を持つ条件は、

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) > 0 \quad \text{かつ} \quad f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) < 0$$

である。

$$f\left(-\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = -\frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q > 0$$

$$\Leftrightarrow q > \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

であり、

$$f\left(\sqrt{-\frac{p}{3}}\right) = \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} + q < 0$$

$$\Leftrightarrow -q > \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}}$$

であるから、これをまとめると、

$$|q| < \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}|p|^{\frac{3}{2}}$$

となる。したがって、 $x^3 + px + q = 0$ が 3 つの異なる実数解をもつ条件は、

$$p < 0, |q| < \frac{2}{3}p\sqrt{-\frac{p}{3}} = \frac{2}{9}\sqrt{3}|p|^{\frac{3}{2}}$$

である。

 $X = x + \frac{a}{3}$ のとき、

$$x = X - \frac{a}{3}$$

であるから、これを $x^3 + ax^2$ に代入すると、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 &= \left(X - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(X - \frac{a}{3}\right)^2 \\ &= X^3 - \frac{1}{3}a^2X + \frac{2}{27}a^3 \end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + bx + c &= X^3 - \frac{1}{3}a^2X + \frac{2}{27}a^3 + b\left(X - \frac{a}{3}\right) + c \\ &= X^3 + \left(-\frac{1}{3}a^2 + b\right)X + \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \end{aligned}$$

と表せる。したがって、

$$p = -\frac{1}{3}a^2 + b, q = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$$

とおくと、 X についての 3 次方程式が 3 つの異なる実数解を持つ条件がわかる。この X についての 3 次方程式の解の個数と $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ の解の個数は一致するので、 $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$ が 3 つの異なる実数解を持つ条件は、

$$b < \frac{1}{3}a^2, \left| \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c \right| < \frac{2}{9}\sqrt{3} \left| b - \frac{1}{3}a^2 \right|^{\frac{3}{2}}$$

である。