

1

(1)	ア	2	イ	1	ウ	1	エ	1	オ	1	カ	1	キ	6
	ク	1	ケ	1	コ	3	サ	2						
(2)	シ	1	ス	3	セ	3	ソ	4	タ	4	チ	3	ツ	5
	テ	3	ト	3	ナ	4	ニ	1	ヌ	3	ネ	2	ノ	3
	ハ	3	ヒ	4										
(3)	フ	3	ヘ	1	ホ	5								
(4)	マ	5	ミ	5	ム	2	メ	1	モ	6	ヤ	5	ユ	5
	ヨ	4	ラ	1	リ	1	ル	8						

【解説】

(1)

$$AP=\begin{pmatrix}3\alpha-3\beta & \alpha \\ -\frac{9}{\beta}+3\alpha-3 & -\frac{3}{\beta}\end{pmatrix}$$

$$PA=\begin{pmatrix}3\alpha-\frac{3}{\beta} & 3\beta+1-\alpha \\ -3\alpha & -3\beta\end{pmatrix}$$

である。したがって $AP=PA$ より各成分を比較すると

$$3\alpha-3\beta=3\alpha-\frac{3}{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \beta^2=1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\alpha=3\beta+1-\alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha=3\beta+1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$-3\alpha=-\frac{9}{\beta}+3\alpha-3$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha=\frac{3}{\beta}+1 \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$-\frac{3}{\beta}=-3\beta$$

$$\Leftrightarrow \beta^2=1$$

となる。①より $\beta=\pm 1$ であるので β の値によって場合分けして考える。

[1] $\beta=1$ のとき

②より

$$\alpha=\frac{3+1}{2}$$

$$=2$$

である。これは③を満たす。したがって

$$\alpha=2, \beta=1$$

は条件を満たす。

[2] $\beta=-1$ のとき

②より

$$\alpha=\frac{-3+1}{2}$$

$$=-1$$

である。これは③を満たす。したがって

$$\alpha=-1, \beta=-1$$

は条件を満たす。

したがって以上より

$$\alpha=2, \beta=1 \text{ または } \alpha=-1, \beta=-1$$

である。よって $\alpha>0$ のとき

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

である。したがって

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -3 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 1 \\ -3 & -1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 1 \\ -3 & -2\end{pmatrix}$$

$$=A-E$$

$$\therefore A^2=A-E \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

となる。④より

$$A^3=A(A-E)$$

$$=A-E-A$$

$$=-E$$

となる。したがって

$$A^4=-A, A^5=E-A$$

となるがこれはともに E ではない。よって

$$A^6=\left(A^3\right)^2$$

$$=E$$

より A^n をみたす最小の正の整数 n は $n=6$ である。さらに

$$A^{11}=\left(A^6\right)^2A^{-1}$$

$$=A^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix}-1 & -1 \\ 3 & 2\end{pmatrix}$$

となる。

(2)

2 倍角, 3 倍角の公式より

$$-\frac{1}{12}\sin\theta\cos2\theta=-\frac{1}{12}\sin\theta(1-2\sin^2\theta)$$

$$=-\frac{1}{12}\sin\theta+\frac{1}{6}\sin^3\theta$$

$$-\frac{1}{24}\sin3\theta=-\frac{1}{8}\sin\theta+\frac{1}{6}\sin^3\theta$$

となる。したがって

$$f(\theta)=\left(-\frac{13}{24}-\frac{1}{12}-\frac{1}{8}\right)\sin\theta+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)\sin^3\theta$$

$$=-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta$$

となる。ここで $t=\sin\theta$ と置く と $0\leq\theta<2\pi$ より $-1\leq t\leq 1$ であり

$$f(\theta)=-\frac{3}{4}\sin\theta+\frac{1}{3}\sin^3\theta$$

$$=-\frac{3}{4}t+\frac{1}{3}t^3$$

となる。これを $g(t)$ とする。 $g(t)$ を微分すると

$$g'(t)=t^2-\frac{3}{4}$$

$$=\left(t-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

となる。したがって $g(t)$ の増減表下のようになる。

t	-1	...	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	...	1
$g'(t)$	+	+	0	-	0	+	+
$g(t)$	$\frac{5}{12}$	$\nearrow$	$\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{3}}{4}$	$\nearrow$	$-\frac{5}{12}$

ここで $t=\sin\theta$ と $0\leq\theta<2\pi$ より

$$t=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$$

$$t=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta=\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

である。したがって $f(\theta)$ は $\theta=\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$ のとき最大値 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとり、 $\theta=\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ のときに最

小値 $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ をとる。

(3)

$f(x)$ の分母は $x\rightarrow 0$ で 0 に収束するので、 $f(x)$ が $x\rightarrow 0$ で収束するためには $f(x)$ の分子が $x\rightarrow 0$ で 0 に収束することが必要である。よって

$$0+a-\sqrt{0^2+9}=0$$

$$\Leftrightarrow a=3$$

が必要である。逆に $a=3$ のとき

$$f(x)=\frac{(x+3)-\sqrt{x^2+9}}{5x}$$

$$=\frac{\left\{(x+3)-\sqrt{x^2+9}\right\}\left\{(x+3)+\sqrt{x^2+9}\right\}}{5x\left\{(x+3)+\sqrt{x^2+9}\right\}}$$

$$=\frac{(x+3)^2-(x^2+9)}{5x\left\{(x+3)+\sqrt{x^2+9}\right\}}$$

$$=\frac{6}{5\left\{(x+3)+\sqrt{x^2+9}\right\}}$$

となる。したがって

$$\lim_{x\rightarrow 0}f(x)=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3+3}$$

$$=\frac{1}{5}$$

となる。よって $a=3$ は $f(x)$ が $x\rightarrow 0$ で収束するための十分条件である。したがって $a=3$ で

あり求める極限値は $\frac{1}{5}$ である。

(4)

(a)

目の出方の全事象は $6^3=216$ 通りである。出た目が 3 つとも異なるような目の出方は $6\cdot 5\cdot 4=120$ 通りであり、出た目が 3 つとも同じであるような目の出方は 6 通りである。よって出た目が 2 つのみ同じであるような目の出方は

$$216-(120+6)=90 \text{ 通り}$$

である。 x_1, x_2, x_3 の対等性より出た目が 3 つとも異なるような 120 通りの出方のうち、 x_1 が最大である出方は

$$\frac{120}{3}=40 \text{ 通り}$$

ある。同様に出了た目が 2 つのみ同じであるような 90 通りの出方のうち x_1 が他の 2 つの目と異なるような出方は

$$\frac{90}{3}=30 \text{ 通り}$$

あり、そのうち x_1 が他の 2 つの目よりも大きいような出方は

$$\frac{30}{2}=15 \text{ 通り}$$

ある。出た目が 3 つとも同じである 6 通りの中には条件を満たすような場合は存在しない。したがって条件を満たすような目の出方は

$$40+15=55 \text{ 通り}$$

ある。したがって、求める確率は

$$\frac{55}{216}$$

となる。

(b)

(a) より出た目が 3 つとも異なるような目の出方は 120 通りある。 x_1, x_2, x_3 の大小は 6 通り存在するので対等性から $x_1<x_2<x_3$ となるような場合は

$$\frac{120}{6}=20 \text{ 通り}$$

である。したがって求める確率は

$$\frac{20}{216}=\frac{5}{54}$$

となる。

(c)

与えられた等式より

$$3x_1+2x_2=12+x_3 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

である。 x_3 の値によって場合分けして考える。

[1] $x_3=1$ のとき

このとき①より

$$2x_2=13-3x_1$$

である。左辺が偶数であることに注意すると x_1 は奇数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(1, 5), (3, 2)$$

の 2 通りである。

[2] $x_3=2$ のとき

このとき①より

$$3x_1=2(7-x_2)$$

である。右辺が偶数であることに注意すると x_1 は偶数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(2, 4), (4, 1)$$

の 2 通りである。

[3] $x_3=3$ のとき

このとき①より

$$2x_2=3(5-x_1)$$

である。右辺が 3 の倍数であることに注意すると x_2 は 3 の倍数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(3, 3), (1, 6)$$

の 2 通りである。

[4] $x_3=4$ のとき

このとき①より

$$3x_1=2(8-x_2)$$

である。右辺が偶数であることに注意すると x_1 は偶数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(2, 5), (4, 2)$$

の 2 通りである。

[5] $x_3=5$ のとき

このとき①より

$$2x_2=17-3x_1$$

である。左辺が偶数であることに注意すると x_1 は奇数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(3, 4), (5, 1)$$

の 2 通りである。

[6] $x_3=6$ のとき

このとき①より

$$2x_2=3(6-x_1)$$

である。右辺が 3 の倍数であることに注意すると x_2 は 3 の倍数である。したがって

$$(x_1, x_2)=(2, 6), (4, 3)$$

の 2 通りである。

以上[1], [2], [3], [4], [5], [6]より条件を満たす x_1, x_2, x_3 は 12 通りある。したがって求める確率は

$$\frac{12}{216}=\frac{1}{18}$$

である。

2

(1)

$A\left(t, \frac{2}{t}+2\right)$ と $(0, -1)$ の距離は

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(t-0)^2 + \left(\frac{2}{t}+3\right)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + \frac{4}{t^2} + \frac{12}{t} + 9} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad d = \sqrt{t^2 + \frac{4}{t^2} + \frac{12}{t} + 9}$$

(2)

$f(t) = t^2 + \frac{4}{t^2} + \frac{12}{t} + 9$ ($t > 0$) とする。 $f(t)$ が最小となるとき d も最小となる。 $f(t)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(t) &= 2t - \frac{8}{t^3} - \frac{12}{t^2} \\ &= \frac{2(t-2)(t^3+2t^2+4t+2)}{t^3} \end{aligned}$$

となる。ここで $t > 0$ において $t^3 + 2t^2 + 4t + 2 > 0$ であるので $f(t)$ の増減表は下のようになる。

t	0	...	2	...
$f'(t)$		-	0	+
$f(t)$		↘		↗

したがって、これより $f(t)$ は $t=2$ において最小値をとる。したがって d を最小にする A は $A(2, 3)$ である。

(答) $A(2, 3)$

(3)

$C: y = \frac{2}{x} + 2$ であるので $y' = -\frac{2}{x^2}$ である。したがって l の方程式は、

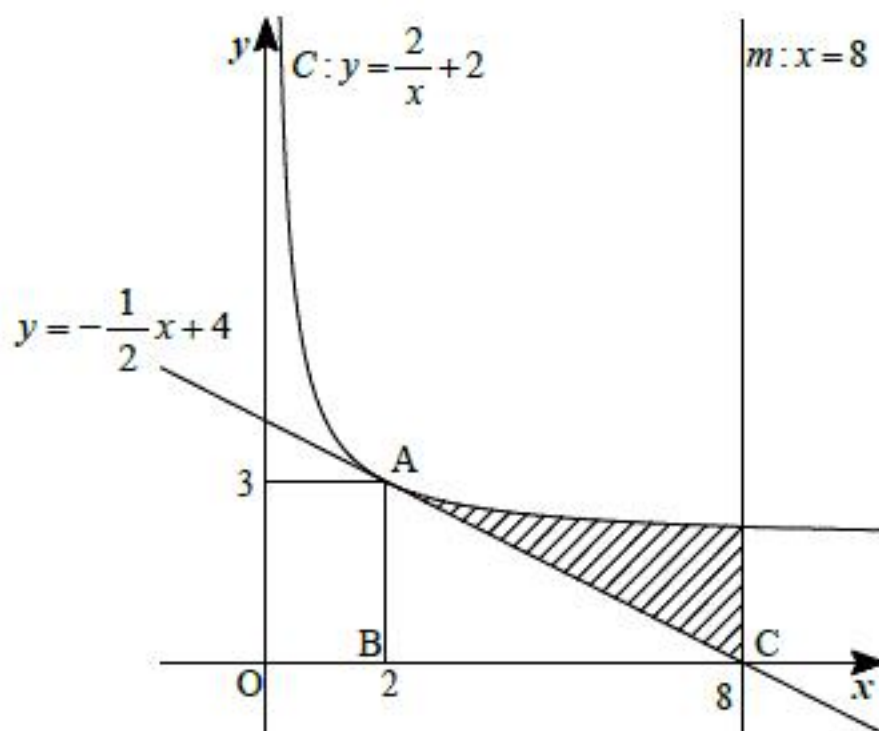
$$\begin{aligned} y &= -\frac{2}{4}(x-2) + 3 \\ \therefore y &= -\frac{1}{2}x + 4 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \ell: y = -\frac{1}{2}x + 4$$

(4)

(3)の結果より直線 $m: x=8$ である。したがって求める体積は下図斜線部の領域を x 軸の周りに回転して出来る立体の体積である。



上図のように点 A, B, C を定める。このとき求める体積は直線 $x=2, x=8, x$ 軸及び曲線 C で囲まれた部分を x 軸の周りに1回転して出来る立体の体積から、 $\triangle ABC$ を x 軸の周りに1回転して出来る円錐の体積を引くことによって得られる。したがって求める体積を V とすると

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_2^8 \left(\frac{2}{x} + 2 \right)^2 dx - \pi \times 3^2 \times (8-2) \times \frac{1}{3} \\ &= \pi \left[-\frac{4}{x} + 8 \log x + 4x \right]_2^8 - 18\pi \\ &= \left(16 \log 2 + \frac{15}{2} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

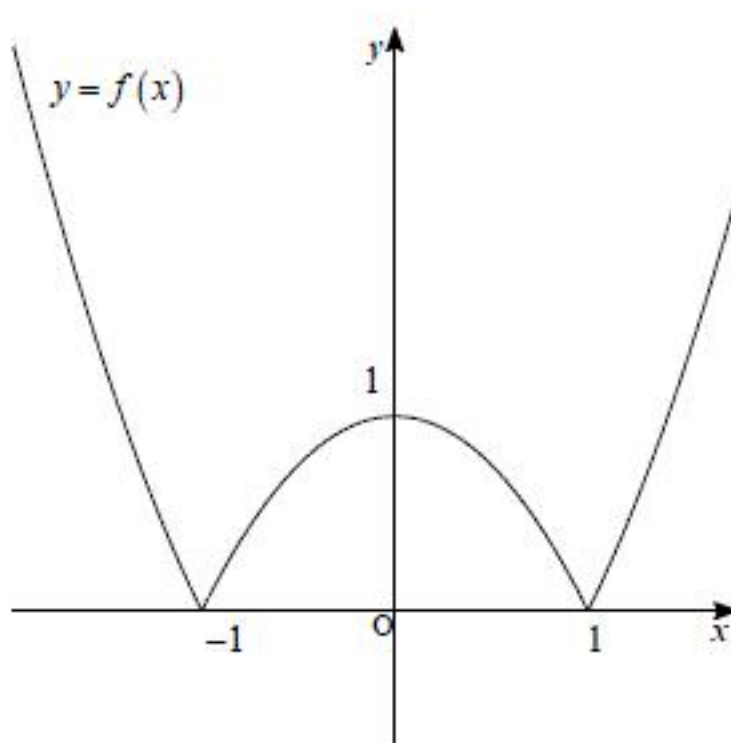
$$(\text{答}) \quad \left(16 \log 2 + \frac{15}{2} \right) \pi$$

(1)

絶対値を外すと

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & (x \leq -1, 1 < x \text{ のとき}) \\ -x^2 + 1 & (-1 < x \leq 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる。したがって $y = f(x)$ のグラフと x 軸の共有点は $(1, 0), (-1, 0)$ であり、 y 軸との共有点は $(0, 1)$ である。よって $y = f(x)$ のグラフは下図のようになる。



(答) 前図

(2)

(1)のグラフより α は $y = kx$ と $y = -x^2 + 1$ の 2 交点の x 座標が大きい方であるので

$$x^2 + kx - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

となる。 β は $y = kx$ と $y = x^2 - 1$ の 2 交点の x 座標が大きい方であるので

$$x^2 - kx - 1 = 0$$

$$\therefore \beta = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

となる。

$$(答) \alpha = \frac{-k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}, \beta = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

(3)

(2)の結果より、

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{-a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}^2 + 4}}{2} + \frac{a_{n-1} + \sqrt{a_{n-1}^2 + 4}}{2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{a_{n-1}^2 + 4} \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} 4a_n^2 &= a_{n-1}^2 + 4 \\ \Leftrightarrow a_n^2 - \frac{4}{3} &= \frac{1}{4} \left(a_{n-1}^2 - \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

となる。したがって数列 $\left\{ a_n^2 - \frac{4}{3} \right\}$ は初項 $a_1^2 - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$ 、公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列である。したがって

$$\begin{aligned} a_n^2 - \frac{4}{3} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} \\ \therefore a_n^2 &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) a_n^2 = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{4}{3}$$

(4)

$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{a_{n-1}^2 + 4}$ であるので、 $a_n > 0$ である。したがって(3)の結果より

$$a_n = \sqrt{-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{4}{3}}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^{n-1} + \frac{4}{3}} \right) \\ &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

となる。