

【1】

【解答】

- (1) (a) ア 6 イ 2 ウ 4
(b) エ 2 オ 1 カ 1 キ 2 ク 6
ケ 0 コ 0 サ 2 シ 2 ス 1
セ 0
- (2) (a) ソ 6 タ 2 チ 3 ツ 8
(b) テ 5 ト 5 ナ 1 ニ 3 ヌ 2
ネ 6 ノ 2 ハ 6 ヒ 5 フ 2
ヘ 6 ホ 2 マ 6
- (3) ミ 1 ム 3 メ 1 モ 2 ヤ 3
ユ 2 ヨ 5 ラ 1 リ 1 ル 1
レ 1 ロ 2 ワ 5 ヲ 1 ン 4

【解説】

(1)

(a)

$$\begin{cases} x=t-\frac{6}{t} & \cdots \textcircled{1} \\ 2y=t+\frac{6}{t} & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

であるから、①+②より、

$$\begin{aligned} x+2y &= 2t \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{2}x+y & \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。また、①の両辺に t をかけて

$$t^2 - xt - 6 = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

である。よって、④に③を代入して、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}x+y\right)^2 - x\left(\frac{1}{2}x+y\right) - 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2 + y^2 - 6 &= 0 \\ \therefore \frac{y^2}{6} - \frac{x^2}{24} &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

$$\begin{cases} x=t-\frac{6}{t}-6 & \cdots \textcircled{5} \\ y=\log\left(t+\frac{6}{t}\right)-1 & \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

⑤を変形すると、

$$x+6=t-\frac{6}{t} \quad \cdots \textcircled{7}$$

となるので、⑦の両辺を二乗して、

$$\begin{aligned} (x+6)^2 &= \left(t-\frac{6}{t}\right)^2 \\ \Leftrightarrow (x+6)^2 &= t^2 - 12 + \frac{36}{t^2} \\ \Leftrightarrow (x+6)^2 &= \left(t+\frac{6}{t}\right)^2 - 24 \\ \Leftrightarrow \left(t+\frac{6}{t}\right)^2 &= x^2 + 12x + 60 \end{aligned}$$

と変形できる。 $t>0$ であるから、 $t+\frac{6}{t}>0$ となるので、

$$t+\frac{6}{t}=\sqrt{x^2+12x+60} \quad \cdots \textcircled{8}$$

となる。⑧を⑥に代入して、

$$\begin{aligned} y &= \log\sqrt{x^2+12x+60} - 1 \\ &= \frac{1}{2}\log(x^2+12x+60) - 1 \end{aligned}$$

と求まる。上式を微分すると、

$$y' = \frac{1}{2} \frac{2x+12}{x^2+12x+60}$$

となるので、 $y' = \frac{1}{10}$ のとき、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{2x+12}{x^2+12x+60} &= \frac{1}{10} \\ \Leftrightarrow 5(2x+12) &= x^2+12x+60 \quad (\because x^2+12x+60=(x+6)^2+24 \neq 0) \\ \Leftrightarrow x^2+2x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x+2) &= 0 \\ \therefore x &= 0, -2 \end{aligned}$$

と求まる。 $x=-2$ となる正の数 t は、 $x=-2$ を⑤に代入して、

$$\begin{aligned} -2 &= t - \frac{6}{t} - 6 \\ \Leftrightarrow t - 4 - \frac{6}{t} &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 4t - 6 &= 0 \quad (\because t>0) \\ \therefore t &= 2 \pm \sqrt{2^2+6} \\ &= 2 \pm \sqrt{10} \end{aligned}$$

と求まるが $t>0$ であるので、求める t の値は、

$$t = 2 + \sqrt{10}$$

である。

(2)

(a)

$$x^2 - 2(\sin\theta + \cos\theta)x + \frac{13}{8}\cos^2 2\theta = 0 \quad \cdots (*)$$

$$\sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)$$

であるから、(*)を変形して、

$$(*) \Leftrightarrow x^2 - \left\{2\sqrt{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\right\}x + \frac{13}{8}\cos^2 2\theta = 0 \quad \cdots \textcircled{9}$$

となる。 $\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき、

$$\begin{aligned} \textcircled{9} &\Leftrightarrow x^2 - \left\{2\sqrt{2} \sin\frac{\pi}{3}\right\}x + \frac{13}{8}\cos^2\frac{\pi}{6} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - \sqrt{6}x + \frac{39}{32} = 0 \\ &\Leftrightarrow 32x^2 - 32\sqrt{6}x + 39 = 0 \\ \therefore x &= \frac{16\sqrt{6} \pm \sqrt{288}}{32} \\ &= \frac{16\sqrt{6} \pm 12\sqrt{2}}{32} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{2} \pm \frac{3}{8}\sqrt{2} \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

(*)が異なる2つの実数解をもつとき判別式が正となればよいので、(*)の判別式を D とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (\sin\theta + \cos\theta)^2 - \frac{13}{8}\cos^2 2\theta > 0 \\ \Leftrightarrow \sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta - \frac{13}{8}(1 - \sin^2 2\theta) &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{13}{8}\sin^2 2\theta + \sin 2\theta - \frac{5}{8} &> 0 \\ \Leftrightarrow 13\sin^2 2\theta + 8\sin 2\theta - 5 &> 0 \\ \Leftrightarrow (13\sin 2\theta - 5)(\sin 2\theta + 1) &> 0 \\ \therefore \frac{5}{13} < \sin 2\theta \leq 1 \quad (\because -1 \leq \sin 2\theta \leq 1) & \cdots \textcircled{10} \end{aligned}$$

と求まる。⑩より、

$$\sin 2\theta > 0$$

であるから、

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

である。⑩の辺々を二乗して、

$$\frac{25}{169} < \sin^2 2\theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{25}{169} < 1 - \cos^2 2\theta \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \cos^2 2\theta < \frac{144}{169}$$

となる。 $-1 \leq \cos 2\theta \leq 1$ であるから、

$$-\frac{12}{13} < \cos 2\theta < \frac{12}{13} \quad \cdots \textcircled{11}$$

となる。したがって、

$$\textcircled{11} \Leftrightarrow -\frac{12}{13} < 2\cos^2\theta - 1 < \frac{12}{13}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{26} < \cos^2\theta < \frac{25}{26}$$

となるので、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\cos\theta > 0$ であるから、

$$\frac{1}{26}\sqrt{26} < \cos\theta < \frac{5}{26}\sqrt{26}$$

と求まる。

(3)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OA}} + 2\overrightarrow{\text{OB}} + 3\overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 6\overrightarrow{\text{OA}} + 2\overrightarrow{\text{AB}} + 3\overrightarrow{\text{AC}} &= \vec{0} \\ \therefore \overrightarrow{\text{AO}} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AC}} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\overrightarrow{\text{AO}} = \frac{5}{6}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\text{AC}}\right)$$

と表せる。よって、AOとBCの交点がPであるから、

$$\overrightarrow{\text{AP}} = \frac{2}{5}\overrightarrow{\text{AB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\text{AC}}$$

と表せるので、

$$\text{BP}:\text{PC}=3:2$$

と求まる。

$$\overrightarrow{\text{AO}} = \frac{5}{6}\overrightarrow{\text{AP}}$$

であるから、

$$\text{AO}:\text{OP}=5:1$$

と求まる。また、与式より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OA}} + 2\overrightarrow{\text{OB}} + 3\overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{CA}} + 2\overrightarrow{\text{CB}} + 6\overrightarrow{\text{OC}} &= \vec{0} \\ \therefore \overrightarrow{\text{CO}} &= \frac{1}{6}\overrightarrow{\text{CA}} + \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{CB}} \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\text{CA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{CB}}\right) \end{aligned}$$

と表せる。COとABの交点がQであるから、

$$\overrightarrow{\text{CQ}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\text{CA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{CB}}$$

と表せる。よって、

$$\overrightarrow{\text{CO}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{CQ}}$$

であるので、

$$\text{CO}:\text{OQ}=1:1$$

と求まる。AB//MNより、

$$\triangle \text{CMO} \sim \triangle \text{CAQ}, \triangle \text{CON} \sim \triangle \text{CQB}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{MO}:\text{AQ} &= \text{CO}:\text{CQ} \\ &= 1:2 \\ \text{ON}:\text{QB} &= \text{CO}:\text{CQ} \\ &= 1:2 \end{aligned}$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} \text{MN}:\text{AB} &= \text{MO}+\text{ON}:\text{AQ}+\text{QB} \\ &= 1:2 \end{aligned}$$

であるので、AB//MNより、

$$\overrightarrow{\text{MN}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{AB}}$$

と求まる。また、 $\triangle \text{CON} \sim \triangle \text{CQB}$ より、

$$\begin{aligned} \text{CN}:\text{CB} &= 1:2 \\ \therefore \text{CN}:\text{NB} &= 1:1 \end{aligned}$$

である。よって、

$$\text{BN} = \frac{1}{2}\text{BC}$$

である。また、BP:PC=3:2より、

$$\text{PC} = \frac{2}{5}\text{BC}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \text{NP} &= \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right)\text{BC} \\ &= \frac{1}{10}\text{BC} \end{aligned}$$

となる。以上より、

$$\begin{aligned} \text{BN}:\text{NP}:\text{PC} &= \frac{1}{2}:\frac{1}{10}:\frac{2}{5} \\ &= 5:1:4 \end{aligned}$$

と求まる。

2

(1)

$$f'(x) = -e^{-x}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\ell: y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= -e^{-a}(x-a) + e^{-a} \\ &= -e^{-a}x + (a+1)e^{-a}\end{aligned}$$

となる。上式に $y=0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}0 &= -e^{-a}x + (a+1)e^{-a} \\ \therefore x &= a+1 \\ \therefore P(a+1, 0)\end{aligned}$$

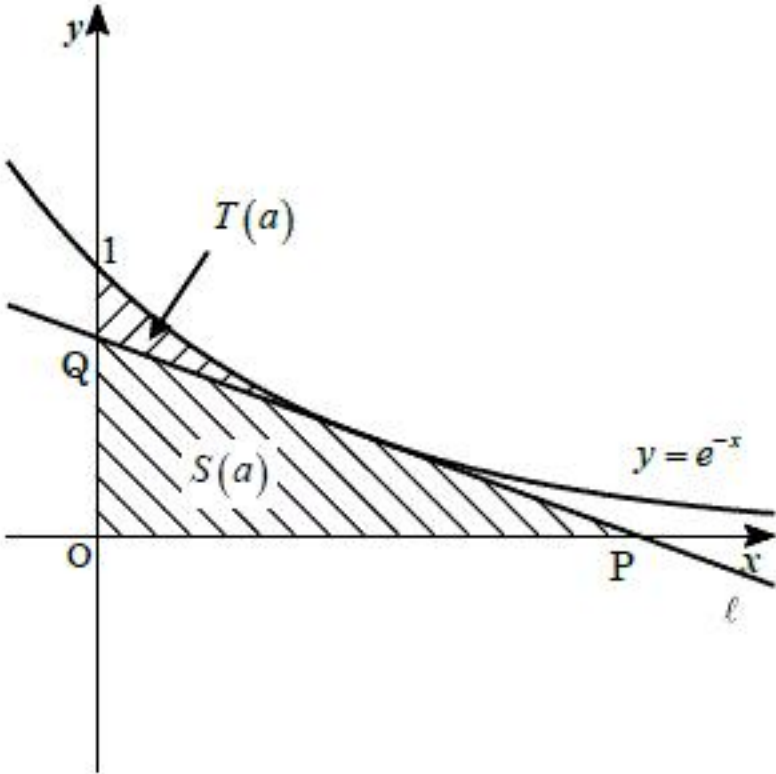
と求まる。また、 $x=0$ を代入すると、

$$\begin{aligned}\therefore y &= (a+1)e^{-a} \\ \therefore Q(0, (a+1)e^{-a})\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $P(a+1, 0), Q(0, (a+1)e^{-a})$

(2)



(1)より、

$$\begin{aligned}S(a) &= (a+1) \cdot (a+1)e^{-a} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}(a+1)^2 e^{-a}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}S'(a) &= (a+1)e^{-a} + \frac{1}{2}(a+1)^2 \cdot (-1)e^{-a} \\ &= \frac{1}{2}(a+1)(2-a-1)e^{-a} \\ &= -\frac{1}{2}(a+1)(a-1)e^{-a}\end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ であるから、

$$S'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 1$$

となるので、 $S(a)$ の増減表は下記のとおりである。

a	(0)	...	1	...
$S'(a)$		+	0	-
$S(a)$		↗		↘

$$S(1) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

であるから、 $S(a)$ は $a=1$ のとき、最大値 $\frac{2}{e}$ をとる。

(答) 最大値: $\frac{2}{e}$ ($a=1$ のとき)

(3)

$$\begin{aligned}T(a) &= \int_0^a [e^{-x} - \{-e^{-a}x + (a+1)e^{-a}\}] dx \\ &= \left[-e^{-x} + \frac{1}{2}e^{-a}x^2 - (a+1)e^{-a}x \right]_0^a \\ &= \left\{ -e^{-a} + \frac{1}{2}a^2e^{-a} - (a^2+a)e^{-a} \right\} - (-1) \\ &= -\left(\frac{1}{2}a^2 + a + 1 \right) e^{-a} + 1\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}1 - T(a) &= \left(\frac{1}{2}a^2 + a + 1 \right) e^{-a} \\ \therefore e^a (1 - T(a)) &= \frac{1}{2}a^2 + a + 1\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $e^a (1 - T(a)) = \frac{1}{2}a^2 + a + 1$

(4)

(1)より、

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= a_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - a_n &= 1\end{aligned}$$

となるので、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned}a_n &= a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} 1 \\ &= a_1 + n - 1 \\ &= a + n - 1\end{aligned}$$

となる。上式は $n=1$ でも成立する。したがって、

$$\begin{aligned}s_n &= \sum_{k=1}^n f(a_k) \\ &= \sum_{k=1}^n e^{-(a+k-1)} \\ &= e^{-a} \sum_{k=1}^n e^{-(k-1)} \\ &= e^{-a} \frac{1 - \left(\frac{1}{e} \right)^n}{1 - \frac{1}{e}} \\ &= \frac{e^{1-a}}{e-1} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{e} \right)^n \right\}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} s_n &= \frac{e^{1-a}}{e-1} \{1 - 0\} \\ &= \frac{e^{1-a}}{e-1}\end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{e^{1-a}}{e-1}$

3

(1)

ゲームに勝った場合を○とし、負けた場合を×と表すとする。ゲームを3回行ったときの○、×の組み合わせとそのときの得点は下記のとおりになる。

1回目	2回目	3回目	得点
○	○	○	$1+1+1=3$
○	○	×	$1+1-1=1$
○	×	○	$1-1+2=2$
○	×	×	$1-1-2=-2$
×	○	○	$-1+2+1=2$
×	○	×	$-1+2-1=0$
×	×	○	$-1-2+4=1$
×	×	×	$-1-2-4=-7$

したがって、 $S_3 \geq 0$ となる確率は、

$$\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

である。

(答) $\frac{3}{4}$

(2)

このときの n 回目から $n+m+1$ 回目までの勝敗と各々のときの得点は下表の通りである。

回数	n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	...	$n+m$	$n+m+1$
勝敗	○	×	×	×		×	○
得点		-1	-2	-4		-2^{m-1}	2^m

したがって、

$$\begin{aligned} T &= q_{n+1} + q_{n+2} + \cdots + q_{n+m} + q_{n+m+1} \\ &= -1 - 2 - 4 - \cdots - 2^{m-1} + 2^m \\ &= -\sum_{k=1}^m 2^{k-1} + 2^m \\ &= -\frac{2^m - 1}{2 - 1} + 2^m \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $T = 1$

(3)

(2)より、×が何回続いても、その後に関○が来たら、×が始まったところから○までの部分の和は+1になる。これをリセットと呼ぶことにする。リセットの回数で場合分けをすることにより、 $S_7 = 3$ となる場合の数について考える。

[1] ○で3回リセットされるとき、

$$(x\circ), (x\circ), (xx\circ)$$

の()の中の得点の部分の和は+1であるから、上の3つの組の順列を考えればよい。したがって、

$${}_3C_1 = 3 \text{ [通り]}$$

である。

[2] ○で2回リセットされるとき、

$$(xx\circ), (\circ), (xx\circ) \text{ または } (x\circ), (\circ), (xxx\circ)$$

の順列を考えればよいので、

$${}_3C_1 + 3! = 9 \text{ [通り]}$$

である。

[3] ○で1回リセットされるとき、

$$(xxxx\circ), (\circ), (\circ)$$

の順列を考えればよいので、

$${}_3C_1 = 3 \text{ [通り]}$$

である。

[1], [2], [3]より、 $S_7 = 3$ となる確率は、

$$\frac{3+9+3}{2^7} = \frac{15}{128}$$

と求まる。

(答) $\frac{15}{128}$

(4)

$S_7 \geq 0$ の余事象である $S_7 < 0$ となる場合を考える。7回のゲームのうちの勝数、すなわち○の数で場合分けをして考える。

[1] ○が0個のとき、

このとき、

$$xxxxxxx$$

のみが考えられ、これは $S_7 < 0$ を満たす。

[2] ○が1個のとき、

$$[xxxx\circ]|xx$$

の[]の中身の順番を入れ替えても[]部分の得点は最大1点であり、|の右側の部分の得点は最大-3点であるから、[]の中の順列を考えて、その後に××を付加したものの得点は0より小さくなる。よって、[]の中の順列を考えればよいから、○が1個のとき $S_7 < 0$ となる確率は、

$${}_5C_1 = 5 \text{ [通り]}$$

である。

[3] ○が2個のとき、

$$[xxx\circ\circ]|xx$$

の[]の中身の順番を入れ替えても[]部分の得点は最大2点であり、|の右側の部分の得点は最大-3点であるから、[]の中の順列を考えて、その後に××を付加したものの得点は0より小さくなる。よって、○が2個のとき $S_7 < 0$ となる確率は、

$${}_5C_2 = 10 \text{ [通り]}$$

である。

[4] ○が3個のとき、

$$[x\circ\circ\circ]|xxx$$

の[]の中身の順番を入れ替えても[]部分の得点は最大3点であり、|の右側の部分の得点は最大-7点であるから、[]の中の順列を考えて、その後に×××を付加したものの得点は0より小さくなる。よって、○が3個のとき $S_7 < 0$ となる確率は、

$${}_4C_1 = 4 \text{ [通り]}$$

である。

[5] ○が4個のとき、

$$[\circ\circ\circ\circ]|xxx$$

[]部分の得点は4点であり、|の右側の部分の得点は-7点であるから、[]の中の順列を考えて、その後に×××を付加したものの得点は0より小さくなる。よって、○が4個のとき $S_7 < 0$ となる確率は、1通りである。

[1], [2], [3], [4], [5]より、 $S_7 < 0$ となる確率は、

$$\frac{1+5+10+4+1}{2^7} = \frac{21}{128}$$

である。以上より、 $S_7 \geq 0$ となる確率は、

$$1 - \frac{21}{128} = \frac{107}{128}$$

と求まる。

(答) $\frac{107}{128}$