

1

- (1) ア 1 イ 1 ウ 5 エ 5 オ 1 カ 6 キ 3 ク 9
ケ 3 コ 9 サ 1 シ 6 ス 3 セ 9 ソ 1 タ 6
(2) チ 0 ツ 1 テ 6 ト 1 ナ 9 ニ 1 ヌ 8 ネ 0
ノ 1 ハ 6 ヒ 2 フ 9
(3) ヘ 3 ホ 6 マ 1 ミ 3 ム 1 メ 2 モ 2 ヤ 3
ユ 4 ヨ 2 ラ 5 リ 5 ル 6 レ 5 ロ 5

【解説】

(1)

1枚目のカードがTである確率は $\frac{t}{s+t+u}$ であるので(i)より

$$\frac{t}{s+t+u}=\frac{1}{6}$$

$$\therefore s+u=5t$$

となる。また取り出したカードは元に戻さないことに注意すると、1枚目のカードがTであり2枚目のカードがTである確率は(i)より

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{t-1}{s+t+u-1}$$

となる。したがって(ii)より

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{t-1}{s+t+u-1}=\frac{1}{39}$$

$$\therefore s+u=\frac{11(t-1)}{2}$$

となる。したがって以上より

$$5t=\frac{11(t-1)}{2}$$

$$\therefore t=11$$

となる。またこのとき

$$s+u=55\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

となる。したがってカードの総数は $11+55=66$ 枚となる。

並べたカードが順にT,U,Sである確率について(iii)より

$$\frac{1}{6}\cdot\frac{u}{65}\cdot\frac{s}{64}=\frac{1}{40}$$

$$\therefore su=624\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

となる。したがって①、②より s,u は x の2次方程式

$$x^2-55x+624=0$$

の異なる2つの実数解である。したがってこれを解くと

$$x^2-55x+624=0$$

$$\Leftrightarrow (x-16)(x-39)=0$$

$$\therefore x=16,39$$

となるので

$$(s,u)=(16,39)\text{または}(39,16)$$

である。また(iv)より

$$\frac{s}{66}\cdot\frac{s}{65}\cdot\frac{s}{64}>\frac{1}{8}$$

である。 $s=39$ はこれを満たすが $s=16$ はこれを満たさない。したがって

$$(s,u)=(39,16)$$

であることが分かる。

(2)

$f_n(0)=0$ であり、 $x>0$ において $f_n(x)=\left(\frac{x}{6}\right)^ne^{n-x}>0$ であるから $x\geq 0$ における $f_n(x)$ の最小値は0である。また $f_n(x)$ を微分すると

$$f_n'(x)=(n-x)\frac{x^{n-1}}{6^n}e^{n-x}$$

となり、 $x\geq 0$ において $\frac{x^{n-1}}{6^n}e^{n-x}\geq 0$ であるので $f_n(x)$ の増減表は下のようになる。

x	0	...	n	...
$f_n'(x)$	0	+	0	-
$f_n(x)$		$\nearrow$	$\left(\frac{n}{6}\right)^n$	$\searrow$

となる。したがって $f_n(x)$ は $x=n$ において最大値 $f_n(n)=\left(\frac{n}{6}\right)^n$ をとる。したがって $n=1,2,3$

における $f_n(x)$ の最大値はそれぞれ $\frac{1}{6},\frac{1}{9},\frac{1}{8}$ である。

$h_n(0)=0$ であり $x>0$ において $h_n(x)>0$ であるから $x\geq 0$ における $h_n(x)$ の最小値は0である。

また $h_n(x)$ は $h_n(x)=\{f_n(x)\}^{\frac{1}{n}}$ と表されることに注意すると、 $h_n(x)$ は $x=n$ において最大値

$h_n(n)=\frac{n}{6}$ をとる。よって

$$0\leq h_n(x)\leq \frac{n}{6}$$

となる。したがって

$$g_n(x)=\sin\{h_n(x)\}$$

であることより、 $g_n(x)$ の $x\geq 0$ における最小値が -1 でありかつ最大値が1となるための条件は

$$\frac{3}{2}\pi<\frac{n}{6}$$

$$\Leftrightarrow 9\pi<n$$

である。したがって、

$$n>9\pi$$

$$>9\times 3.14$$

$$=28.26$$

より、条件を満たす最小の1以上の整数 n は $n=29$ である。

(3)

直線PQの方程式は

$$y=\frac{-2\sin\theta}{3-2\cos\theta}(x-3)$$

$$\therefore (3-2\cos\theta)y+(2\sin\theta)x-6\sin\theta=0$$

となる。したがって直線PQと原点の距離の2乗は

$$d^2=\frac{(-6\sin\theta)^2}{(3-2\cos\theta)^2+(2\sin\theta)^2}$$

$$=\frac{36\sin^2\theta}{13-12\cos\theta}$$

となる。ここで $t=\cos\theta$ と置くと $0\leq \theta<\pi$ より $-1< t\leq 1$ となる。このとき

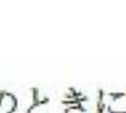
$$d^2=\frac{36(1-t^2)}{13-12t}$$

となるので、これを $g(t)$ とおく。 $g(t)$ を微分すると

$$g'(t)=36\cdot\frac{-2t(13-12t)-(-12)(1-t^2)}{(13-12t)^2}$$

$$=\frac{72}{(13-12t)^2}(2t-3)(3t-2)$$

となる。したがって $g(t)$ の増減表は下のようになる。

t	-1	...	$\frac{2}{3}$	...	1
$g'(t)$		+	0	-	
$g(t)$		$\nearrow$	4	$\searrow$	0

したがって d^2 は $t=\cos\theta=\frac{2}{3}$ のときに最大値 $g\left(\frac{2}{3}\right)=4$ をとる。またこのとき $0\leq \theta<\pi$ より、

$\sin\theta$ は正であるから、

$$\sin\theta=\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

である。したがって直線PQの方程式は

$$y=-\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{6\sqrt{5}}{5}$$

となる。

(1)

 $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = 3x^2 + a$$

であるので点 Q における曲線 C の接線の方程式は

$$y = (3q^2 + a)(x - q) + f(q)$$

$$\therefore y = (3q^2 + a)x - 2q^3 + b$$

となる。したがってこの直線が点 $P(t, f(t))$ を通ることより

$$f(t) = (3q^2 + a)t - 2q^3 + b$$

$$\Leftrightarrow 2q^3 - 3tq^2 + t^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (q - t)^2(2q + t) = 0$$

$$\therefore q = -\frac{t}{2}$$

となる。したがって直線 PQ の傾きと y 切片はそれぞれ

$$m = 3q^2 + a$$

$$= \frac{3}{4}t^2 + a$$

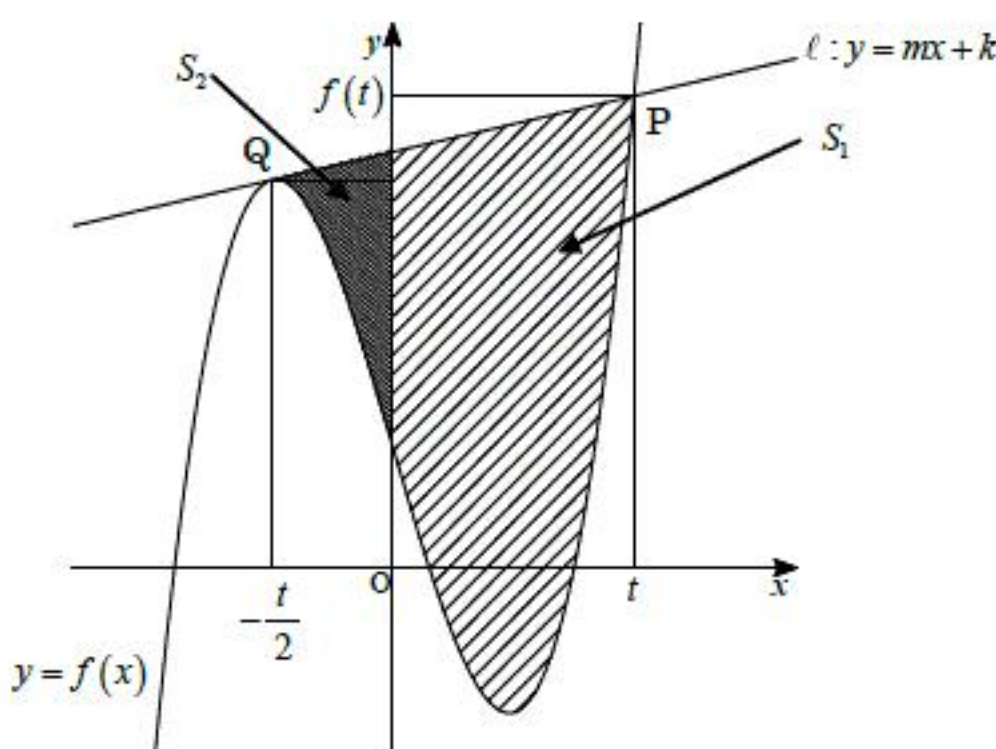
$$k = -2q^3 + b$$

$$= \frac{t^3}{4} + b$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q = -\frac{t}{2}, \quad m = \frac{3}{4}t^2 + a, \quad k = \frac{t^3}{4} + b$$

(2)

 S_1, S_2 はそれぞれ下図の領域の面積を表す。

したがって

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^t \{mx + k - f(x)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{m-a}{2}x^2 + (k-b)x \right]_0^t \\ &= -\frac{t^4}{4} + \frac{3}{8}t^4 + \frac{t^4}{4} \\ &= \frac{3}{8}t^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-\frac{t}{2}}^0 \{mx + k - f(x)\} dx \\ &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{m-a}{2}x^2 + (k-b)x \right]_{-\frac{t}{2}}^0 \\ &= \frac{t^4}{64} - \frac{3}{32}t^4 + \frac{t^4}{8} \\ &= \frac{3}{64}t^4 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{3}{8}t^4, \quad S_2 = \frac{3}{64}t^4$$

(3)

 $x = \alpha$ において $y = f(x)$ が直線 $y = 0$ に接するとする。このとき

$$f(\alpha) = 0 \text{ かつ } f'(\alpha) = 0$$

である。すなわち

$$\alpha^3 + a\alpha + b = 0$$

$$3\alpha^2 + a = 0$$

となる。これらより

$$a = -3\alpha^2, \quad b = 2\alpha^3$$

となる。一方このとき点 Q は直線 $y = 0$ 上にあるので

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{t}{2}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 + 4at - 8b &= 0 \\ \Leftrightarrow t^3 - 12\alpha^2 t - 16\alpha^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t + 2\alpha)(t - 4\alpha) &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで点 Q と点 R は異なる点であるので $-\frac{t}{2} \neq \alpha$ である。したがって

$$\alpha = \frac{t}{4}$$

となる。以上より

$$a = -\frac{3}{16}t^2, \quad b = \frac{t^3}{32}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = -\frac{3}{16}t^2, \quad b = \frac{t^3}{32}$$

3

(1)

点 $(1, 2)$ が行列 A の表す 1 次変換により点 $(3, 5)$ に移ることより

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

である。同様に点 $(1, 1)$ が行列 A の表す 1 次変換により直線 $y = x$ 上に移ることより、ある実数 t が存在して

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}$$

となる。したがって

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & t \\ 5 & t \end{pmatrix}$$

となる。したがってこれより

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 3 & t \\ 5 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2t-3 & 3-t \\ 2t-5 & 5-t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。したがって $ad - bc = 4$ より

$$\begin{aligned} (2t-3)(5-t) - (3-t)(2t-5) &= 4 \\ \therefore t &= 2 \end{aligned}$$

となる。これより

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

(答) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

となる。

(2)

(1)の結果より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_n + y_n \\ -x_n + 3y_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。すなわち

$$x_{n+1} = x_n + y_n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{1}$$

$$y_{n+1} = -x_n + 3y_n \qquad \qquad \qquad \cdot \cdot \cdot \textcircled{2}$$

となる。よって $\textcircled{2} - \textcircled{1}$ より

$$y_{n+1} - x_{n+1} = 2(y_n - x_n)$$

となる。また

$$y_1 - x_1 = 1$$

であるので数列 $\{y_n - x_n\}$ は初項 1、公比 2 の等比数列である。よって

$$y_n - x_n = 2^{n-1}$$

となる。

(答) $y_n - x_n = 2^{n-1}$

(3)

$a_n = \frac{x_n}{2^n}, b_n = \frac{y_n}{2^n}$ とおく。このとき(1)の結果より

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{2^n} - \frac{x_n}{2^n} &= \frac{1}{2} \\ \therefore b_n &= a_n + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。これと $\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2} \\ &= a_n + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって数列 $\{a_n\}$ は初項 $a_1 = \frac{1}{2}$ 、公差 $\frac{1}{4}$ の等差数列であるので

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}(n-1) \\ &= \frac{n}{4} + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

となる。したがって $a_n = \frac{x_n}{2^n}$ より

$$\frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$$

となる。

(答) $\frac{x_n}{2^n} = \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}$

(4)

(3)の結果より

$$x_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}$$

である。また(2)の結果より

$$\begin{aligned} y_n &= x_n + 2^{n-1} \\ &= (n+3) \cdot 2^{n-2} \end{aligned}$$

となる。したがって以上より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{3}{n}}{1 + \frac{1}{n}} \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x_n = (n+1) \cdot 2^{n-2}, y_n = (n+3) \cdot 2^{n-2}, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n} = 1$