

1

〔解答〕

- (1) ア 5 イ 4 ウ 1 エ 1 オ 4
カ 9 キ 4 ク 3
- (2) ケ 5 コ 2 サ 9 シ 4 ス 3
セ 5 ソ 2 タ 4
- (3) チ 8 ツ 3 テ 3 ト 6 ナ 7
ニ 2

〔解説〕

(1)

与式を変形すると、

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + 4 \cos 2x \quad \dots \textcircled{1}$$

である。これに、 $x = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{12}$ を代入すると、

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \frac{2}{3}\pi + 4 \cos \frac{2}{3}\pi \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4} - 2 \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{9}{4} \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

①より、

$$f'(x) = \sqrt{3} \cos 2x - 8 \sin 2x$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{2} - 4 \\ &= -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

となる。したがって、 $y = f(x)$ の $\left(\frac{\pi}{12}, f\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= -\frac{5}{2} \left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \frac{9}{4} \sqrt{3} \\ &= -\frac{5}{2} x + \frac{9}{4} \sqrt{3} + \frac{5}{24} \pi \end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2x + 4 \cos 2x \\ &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 4^2} \left(\sin 2x \cdot \sqrt{\frac{3}{67}} + \cos 2x \cdot \frac{8}{\sqrt{67}}\right) \end{aligned}$$

のように変形できるので、

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{3}{67}}, \sin \alpha = \frac{8}{\sqrt{67}}$$

を満たす実数 $\alpha \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ を用いて

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{67}}{2} (\sin 2x \cos \alpha + \cos 2x \sin \alpha) \\ &= \frac{\sqrt{67}}{2} \sin(2x + \alpha) \end{aligned}$$

と書き表される。このとき

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{8}{3} \sqrt{3}$$

である。

〔解答〕

- (1) ア 0 イ 1 ウ 5 エ 4
 (2) オ 4 カ 0 キ 8 ク 3
 (3) ケ 6 コ 6 サ 3 ソ 1 ス 5
 セ 3 シ 3 タ 7

〔解説〕

(1)

線分 AB を $1:3$ に内分する点が D であるから、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \frac{3}{4} \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4} \overrightarrow{OB} \\ &= \frac{3}{4} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と求まる。よって、点 D の座標は

$$\left(0, \frac{15}{4}\right)$$

である。

(2)

(1)より、

$$\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix}$$

であり、

$$\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OA} + (1-t) \overrightarrow{OC}$$

より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BP} &= t \overrightarrow{OA} + (1-t) \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} \\ &= \begin{pmatrix} -t+5 \\ 5t \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となる。したがって、 $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{BP}$ となるのは

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BP} &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 \\ \frac{15}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -t+5 \\ 5t \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2t-10 + \frac{75}{4}t &= 0 \\ \therefore t &= \frac{40}{83}\end{aligned}$$

のときである。

(3)

点 Q は辺 BP 上の点であるから、実数 u を用いて、

$$\overrightarrow{BQ} = u \overrightarrow{BP}$$

と表せる。したがって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + u(\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OB}) \\ &= ut \overrightarrow{OA} + (1-u) \overrightarrow{OB} + (1-t)u \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{2}\end{aligned}$$

と表せる。また、 Q は辺 CD 上の点であるから、実数 v を用いて、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= v \overrightarrow{OC} + (1-v) \overrightarrow{OD} \\ &= \frac{3}{4}(1-v) \overrightarrow{OA} + \frac{1}{4}(1-v) \overrightarrow{OB} + v \overrightarrow{OC} \quad \dots \textcircled{3}\end{aligned}$$

と表せる。②、③の係数を比較して、

$$\begin{cases} ut = \frac{3}{4}(1-v) & \dots \textcircled{4} \\ 1-u = \frac{1}{4}(1-v) & \dots \textcircled{5} \\ (1-t)u = v & \dots \textcircled{6} \end{cases}$$

が成り立てばよい。⑤を④に代入して、

$$\begin{aligned}ut &= \frac{3}{4} \cdot 4(1-u) \\ \Leftrightarrow (t+3)u &= 3 \\ \therefore u &= \frac{3}{t+3} \quad (\because 0 \leq t \leq 1)\end{aligned}$$

と求まる。これを⑥に代入して、

$$v = \frac{3(1-t)}{t+3}$$

と求まる。したがって、点 Q の座標は、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \overrightarrow{OB} + u \overrightarrow{BP} \\ &= \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{3}{t+3} \begin{pmatrix} -t+5 \\ 5t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-6t+6}{t+3} \\ \frac{15t}{t+3} \end{pmatrix}\end{aligned}$$

と表せる。

$\triangle DBQ$ の面積を S_1 、 $\triangle CBQ$ の面積を S_2 とする。また、点 B から CD におろした垂線の足を H とすると、

$$\begin{aligned}S_1 &= DQ \cdot BH \cdot \frac{1}{2} \\ S_2 &= CQ \cdot BH \cdot \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であるから、 $S_1 = S_2$ のとき、

$$DQ = CQ$$

となる。このとき、(3)より、

$$\begin{aligned}v &= 1-v \\ \Leftrightarrow 2v &= 1\end{aligned}$$

となればよい。したがって、

$$\begin{aligned}2 \cdot \frac{3(1-t)}{t+3} &= 1 \\ \Leftrightarrow 7t &= 3 \\ \therefore t &= \frac{3}{7}\end{aligned}$$

と求まる。

3

〔解答〕

ア 8 イ 3 ウ 4 エ 1 オ 3
 カ 3 キ 4 ク 3 ケ 4 コ 3
 サ 8 シ 3 ス 8

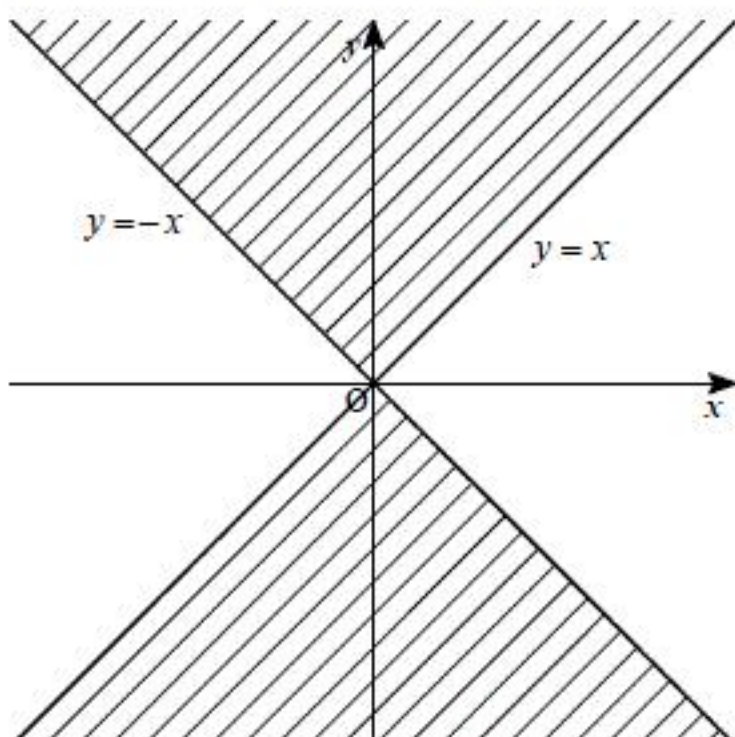
〔解説〕

$$x^2 - y^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 \geq x^2$$

$$\Leftrightarrow |y| \geq |x|$$

となる。したがって、 $x^2 - y^2 \leq 0$ となる領域は下記の斜線部である。ただし、境界を含む。



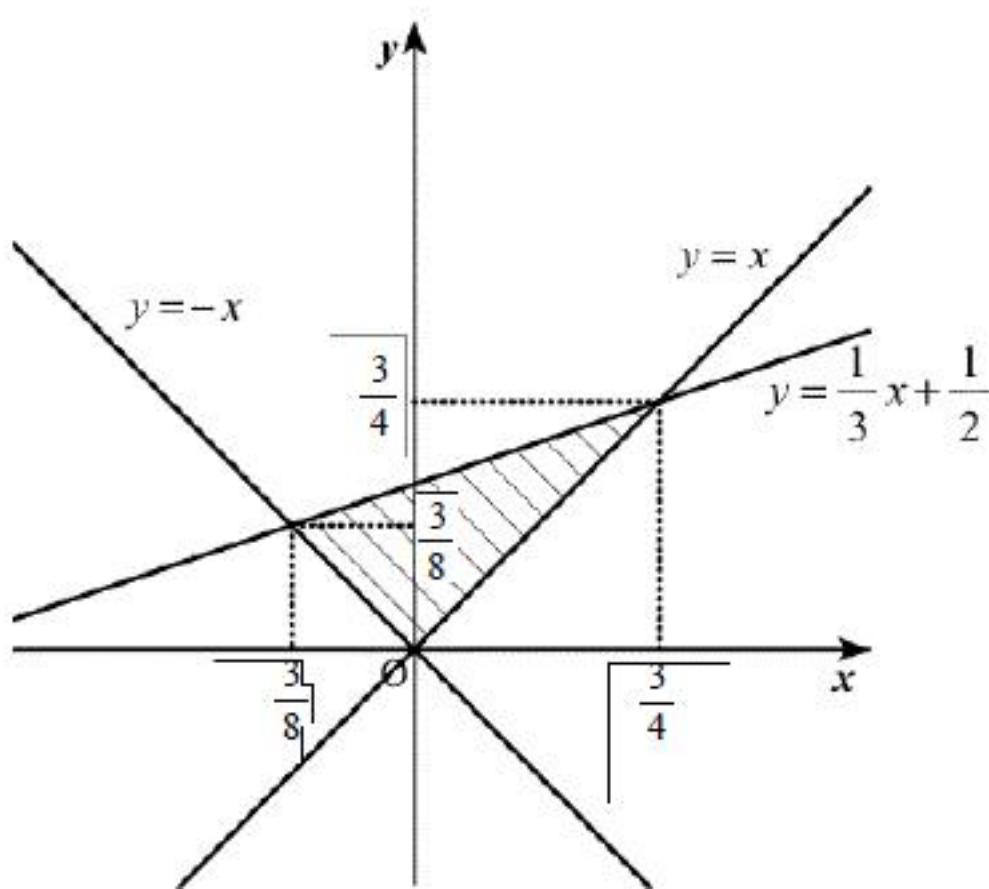
$y = x$ と $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ の交点を計算すると、

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

と求まり、 $y = -x$ と $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ の交点を計算すると、

$$\left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$$

と求まる。したがって、領域 D の表す範囲は下記のとおりである。



よって、領域 D 内で y 座標が最大となる点の y 座標は

$$\frac{3}{4}$$

である。また、 (x, y) が領域 D 内を動くときの $y - mx$ の最大値を求める。実数 k を用いて

$$y - mx = k$$

とおくと、

$$y = mx + k$$

である。 m の値によって場合分けをして k の最大値を求める。

[1] $m \leq \frac{1}{3}$ のとき、

このとき、 $y = mx + k$ の傾きは、 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ の傾きと同じか小さいので、

$y = mx + k$ が $(x, y) = \left(\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right)$ を通るとき k は最大となる。よって、 k の最大値は、

$$\frac{3}{4} - \frac{3}{4}m$$

と求まる。

[2] $m \geq \frac{1}{3}$ のとき、

このとき、 $y = mx + k$ の傾きは、 $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{2}$ の傾きと同じか大きいので、 $y = mx + k$ が

$(x, y) = \left(-\frac{3}{8}, \frac{3}{8}\right)$ を通るとき k は最大となる。よって、 k の最大値は、

$$\frac{3}{8} + \frac{3}{8}m$$

と求まる。

[1], [2] より、 k の最大値は、

$$m \leq \frac{1}{3} \text{ のとき, } \frac{3}{4} - \frac{3}{4}m$$

$$m \geq \frac{1}{3} \text{ のとき, } \frac{3}{8} + \frac{3}{8}m$$

である。

4

(1)

区間 $0 < x < 7$ において

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{-(x-7)-x}{x^2(x-7)^2} \\ &= \frac{2x-7}{x^2(x-7)^2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{2} \end{aligned}$$

である。

$$\begin{aligned} f\left(\frac{7}{2}\right) &= -\frac{1}{\frac{7}{2} \cdot \left(-\frac{7}{2}\right)} \\ &= \frac{4}{49} \end{aligned}$$

より、 $0 < x < 7$ における $f(x)$ の増減表は下記のとおりである。

x	(0)	L	$\frac{7}{2}$	L	(7)
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		]	$\frac{4}{49}$	Z	

したがって、 $0 < x < 7$ において $f(x)$ は

$$x = \frac{7}{2} \text{ のとき, 最小値 } \frac{4}{49}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最小値: } \frac{4}{49} \quad (x = \frac{7}{2} \text{ のとき})$$

(2)

$$\begin{aligned} f(1) &= -\frac{1}{1 \cdot (-6)} = \frac{1}{6} \\ f(4) &= -\frac{1}{4 \cdot (-3)} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

であるから、 $(1, f(1)), (4, f(4))$ を通る直線の方程式は、

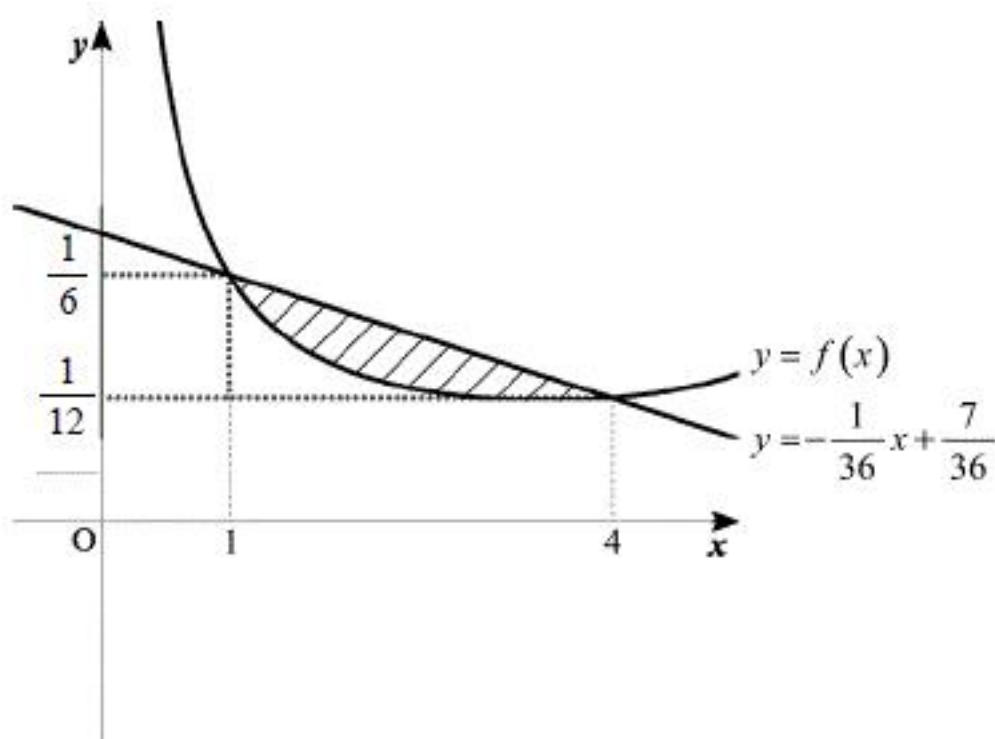
$$\begin{aligned} y &= \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{6}}{4 - 1}(x - 1) + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{36}(x - 1) + \frac{1}{6} \\ &= -\frac{1}{36}x + \frac{7}{36} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = -\frac{1}{36}x + \frac{7}{36}$$

(3)

(1), (2) より、求める面積は下図の斜線部である。



したがって、求める面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^4 \left\{ \left(-\frac{1}{36}x + \frac{7}{36} \right) - \left(-\frac{1}{x(x-7)} \right) \right\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{72}x^2 + \frac{7}{36}x \right]_1^4 + \frac{1}{7} \int_1^4 \left(\frac{1}{x-7} - \frac{1}{x} \right) dx \\ &= -\frac{2}{9} + \frac{7}{9} + \frac{1}{72} - \frac{7}{36} + \frac{1}{7} [\log|x-7| - \log|x|]_1^4 \\ &= \frac{5}{9} - \frac{13}{72} + \frac{1}{7} (\log 3 - \log 4 - \log 6 + \log 1) \\ &= \frac{27}{72} - \frac{1}{7} \log \frac{24}{3} \\ &= \frac{3}{8} - \frac{3}{7} \log 2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{3}{8} - \frac{3}{7} \log 2$$

5

(1)

$\triangle ABC$ において余弦定理より、

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{20+18-50}{2 \cdot 2\sqrt{5} \cdot 3\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \cos \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}}$$

(2)

$\sin \theta > 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^2} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{10}} \\ &= \frac{3}{\sqrt{10}}\end{aligned}$$

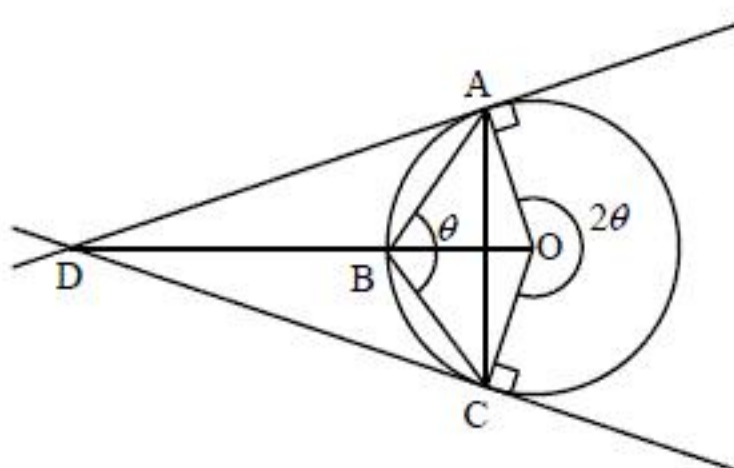
と求まる。したがって、 $\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると、 $\triangle ABC$ において正弦定理より、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AC}{\sin \theta} \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot 5\sqrt{2} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{5}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \frac{5}{3}\sqrt{5}$$

(3)



円 S は $\triangle ABC$ の外接円であるから、 $\angle ABC$ に対する中心角である $\angle AOC$ の優角の大きさは 2θ である。したがって、 $\angle AOC$ の劣角の大きさは $2\pi - 2\theta$ である。また、

$$OA = OC = R$$

であり、

$$\angle OAD = \angle OCD = 90^\circ$$

であるから、

$$\triangle OAD \equiv \triangle OCD$$

である。したがって、

$$\angle AOD = \angle COD$$

である。よって、

$$\begin{aligned}\angle AOD &= \frac{1}{2} \angle AOC \\ &= \frac{1}{2} (2\pi - 2\theta) \\ &= \pi - \theta\end{aligned}$$

と求まる。以上より、 OD の長さは、

$$\begin{aligned}OD &= \frac{OA}{\cos \angle AOD} \\ &= \frac{OA}{\cos(\pi - \theta)} \\ &= \frac{OA}{-\cos \theta} \\ &= \frac{5}{3}\sqrt{5} \cdot \sqrt{10} \\ &= \frac{25}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \frac{25}{3}\sqrt{2}$$