

Q 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

1 次の **ア** から **メ** において、 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め、その数を解答用マークシートにマークせよ。ただし、 は 1 桁の数、 は 2 桁の数、 は 3 桁の数を表す。分数形で解答する場合、それ以上約分できない形で答えよ。(50 点)

(1) 大小 2 つのさいころを投げる。大きいさいころの出た目を初項とし、小さいさいころの出た目を公差とする等差数列が得られる。この数列の初項を a_1 、第 2 項を a_2 のようにそれぞれ表し、一般に第 n 項を a_n によって表す。

- (a) 第 4 項 a_4 が 3 で割り切れる整数である確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。
- (b) 第 8 項 a_8 が 3 で割り切れる整数である確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。
- (c) 第 11 項 a_{11} が 5 で割り切れる整数である確率は $\frac{\text{オ}}{\text{カ}}$ である。
- (d) 第 101 項 a_{101} が 15 で割り切れる整数である確率は $\frac{\text{キ}}{\text{クケ}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

- (2) 実数 x を変数とする関数 $f_1(x) = x + 1$ がある。これを用いて関数 $f_2(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)f_1(x)$ を定め、さらにこれを用いて関数 $f_3(x) = \left(x + \frac{1}{3}\right)f_2(x)$ を定める。一般に 4 以上の自然数 n に対しても同様に、すでに定められている関数 $f_{n-1}(x)$ を用いて、関数 $f_n(x) = \left(x + \frac{1}{n}\right)f_{n-1}(x) = \frac{1}{n}(nx + 1)f_{n-1}(x)$ を定める。

(a) $f_3(x) = x^3 + \frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{コ} & \text{サ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{シ} \\ \hline \end{array}}x^2 + \begin{array}{|c|} \hline \text{ス} \\ \hline \end{array}x + \frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{セ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|} \hline \text{ソ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(b) $f_7(x)$ を x の多項式として表したときの x の係数は $\frac{\begin{array}{|c|} \hline \text{タ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{チ} & \text{ツ} & \text{テ} \\ \hline \end{array}}$ である。

(c) $f_8(x)$ を x の多項式として表したときの x^2 の係数は $\frac{\begin{array}{|c|c|} \hline \text{ト} & \text{ナ} \\ \hline \end{array}}{\begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{ニ} & \text{ヌ} & \text{ネ} \\ \hline \end{array}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

- (3) 空間内に点 $A(1, 0, 0)$, 点 $B(-1, 0, 0)$, 点 $P(1, 2\cos^2\theta, 0)$, 点 $C(1, 0, 1)$ を頂点としてもつ四面体と, 点 $B(-1, 0, 0)$, 点 $A(1, 0, 0)$, 点 $Q(-1, 2\sin^2\theta, 0)$, 点 $D(-1, 0, 1)$ を頂点としてもつ四面体とがある。ただし, θ は 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間を動く実数とする。

(a) 線分 AD と線分 BC の交点の座標は $(\boxed{\text{ノ}}, \boxed{\text{ハ}}, \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}}})$ である。

(b) 実数 θ が 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間を動くときの, 三角形 ABP と三角形 BAQ の共通部分の面積の最大値は $\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$ であり, 三角形 ABP と三角形 BAQ の共通部分が通過する部分の面積は $\frac{\boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$ である。

(c) 実数 θ が 0 と $\frac{\pi}{2}$ の間を動くときの, 2 つの四面体の共通部分が通過する部分の体積は $\frac{\boxed{\text{ム}}}{\boxed{\text{メ}}}$ である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 2, 3 の解答は、解答用紙に記入せよ。原則として、答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 正の実数 t に対して、 $S(t) = \int_t^{t+1} |\log x| dx$ とする。ただし、対数は自然対数を表すものとする。以下の問に答えよ。

- (1) t が $t > 1$ の場合の $S(t)$ の値を求めよ。
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S(t)}{\log t}$ を求めよ。
- (3) t が $0 < t \leq 1$ の場合の $S(t)$ の値を求めよ。
- (4) $S(t)$ はある正の実数 c で最小値をとる。 c を求めよ。

(25 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

3 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ を n 回かけて得られる行列を A^n で表す。ただし、 $A^1 = A$

とする。自然数 n に対し、 $A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする。以下の間に答えよ。

- (1) $b_n = a_{n-1}$ であることを証明せよ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。
- (2) $d_n = b_{n-1}$ であることを証明せよ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。
- (3) α, β, γ を $\beta = \frac{\alpha + \gamma}{2}$ を満たす実数とし、 $s = \beta - \alpha$ とおく。このとき、定積分 $\int_{\alpha}^{\beta} (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)dx$ を s を用いて表せ。ただし、この問については答のみを解答すればよい。
- (4) 関数 $y = (x + a_n)(x + b_n)(x - d_n)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分の面積を $a_n - a_{n-1}$ を用いて表せ。ただし、 n は 2 以上の自然数とする。
- (5) 関数 $y = (x + a_5)(x + b_5)(x - d_5)$ のグラフと x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。ただし、この問については答のみを解答すればよい。

(25 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。