

Q 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 3 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1, 2 の解答は、解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 以下の問に答えよ。必要なら (1) に述べられている事実および (1) で得られた結果は (2) の解答に用いてよい。

- (1) 実数 z と 2 つの 0 以上の実数 t, s によって定まる行列 $P = \begin{pmatrix} 1+t & z \\ 0 & 1+s \end{pmatrix}$ を n 回かけることによって行列 P^n が得られる。ただし、 $P^1 = P$ とする。各自然数 n に対し、

$$P^n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \\ r_n & s_n \end{pmatrix}$$

によって定まる数列 $\{p_n\}, \{q_n\}, \{r_n\}, \{s_n\}$ に関する以下の各問に答えよ。

- (a) 数列 $\{r_n\}$, 数列 $\{p_n\}$ および数列 $\{s_n\}$ の一般項を求めよ。ただし、この間については答のみを解答すればよい。
- (b) $z \neq 0$ のとき、数列 $\{q_n\}$ の一般項 q_n を $q_n = zu_n$ のように表すことによって得られる数列 $\{u_n\}$ について、 u_{n+1} を t, s および u_n を用いて表せ。
- (c) (b) の数列 $\{u_n\}$ の第 n 項について $u_n \geq n$ となる。このことを数学的帰納法によって証明せよ。

- (2) 2 つの 0 以上の実数 a, b および各自然数 n に対し、行列 A_n と B_n が

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & a \\ \frac{1}{n} & -1 \end{pmatrix}, B_n = \begin{pmatrix} 1 & b \\ \frac{1}{n} & -1 \end{pmatrix}$$

によって与えられているとする。 $C_1 = A_1$ とおき、さらに各自然数 k について $C_{2k+1} = (A_{2k+1}B_{2k+1})^k A_{2k+1}$ および $C_{2k} = (A_{2k}B_{2k})^k$ と定めることによって、行列 $C_1, C_2, \dots$ が与えられる。各自然数 n に対し、

$$C_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$$

によって定まる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ に関する以下の各問に答えよ。

- (a) 第 k 項が a_{2k} であるような数列 $\{a_{2k}\}$ について, $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ を求めよ。
- (b) 数列 $\{a_n\}$ の収束・発散を調べ, 収束する場合はその極限値を求めよ。
- (c) 第 k 項が b_{2k} であるような数列 $\{b_{2k}\}$ の収束・発散を調べ, 収束する場合はその極限値を求めよ。
- (d) 数列 $\{b_n\}$ の収束・発散を調べ, 収束する場合はその極限値を求めよ。

(60 点)

2

この問題の解答に背理法を用いてはならない。なお、必要なら正の整数に関する素因数分解を用いてよい。以下の各問に答えよ。

(1)

(a) 「正の整数 m について、 $\log_{10} m$ が有理数ならば $\log_{10} m$ は整数である。」

このことを証明せよ。

(b) (a) に述べられた事実を用いて、次の 2013 個の数

$$\log_{10} 1, \log_{10} 2, \log_{10} 3, \dots, \log_{10} 2012, \log_{10} 2013$$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。さらに、有理数となるものをすべて求めよ。

(2)

(a) 「2つの正の整数 m, n について、 $\sqrt[m]{n}$ が有理数ならば $\sqrt[m]{n}$ は整数である。」

このことを証明せよ。

(b) (a) に述べられた事実を用いて、次の 2013 個の数

$$\sqrt[3]{1}, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[3]{2012}, \sqrt[3]{2013}$$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。さらに、有理数となるものをすべて求めよ。

(c) (a) に述べられた事実を用いて、次の 2013 個の数

$$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{2012}, \sqrt{2013}$$

のうち無理数となるものはいくつあるか理由を述べ答えよ。

(40 点)

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。