平成 25 年度　　〔試験時間　100 分〕

R 1　数　学

この冊子は，数学の問題で１ページより５ページまであります。

〔注　意〕

(1) 試験開始の指示があるまで，この冊子を開いてはいけません。

(2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら，解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また，解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し，さらに受験番号と志望学科をマークしてください。

(3) 解答は，所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。

(4) 解答用マークシートについて

① 解答用マークシートは，絶対に折り曲げてはいけません。

② マークには黒鉛筆(ＨＢまたはＢ)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合，採点できないことがあります。

③ 誤ってマークした場合は，消しゴムで丁寧に消し，消しくずを完全に取り除いたうえ，新たにマークしてください。

④ 解答欄のマークは，横１行について１箇所に限ります。２箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので，はっきりマークしてください。

⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を，必ず読んでから解答してください。

(5) 試験開始の指示があったら，初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁，印刷不鮮明等に気づいた場合は，手を挙げて監督者に知らせてください。

(6) 問題冊子は，試験終了後，持ち帰ってください。

＜問題訂正＞

$\boxed{1}$　（１）ａ

$\boxed{誤}$　$\dfrac{\boxed{ア}\,N - \boxed{イ}\,k}{N^2 - \boxed{ウ}\,N}$

$\boxed{正}$　$\dfrac{\boxed{ア}\,k - \boxed{イ}}{N^2 - \boxed{ウ}\,N}$

問題 $\boxed{1}$ の解答は**解答用マークシート**にマークせよ。

$\boxed{1}$ 次の (1) から (3) において，$\boxed{}$ 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め，その数字を**解答用マークシート**にマークせよ。ただし，$\boxed{\vdots}$ は 2 桁(けた)の数を表すものとする。また，分数は既約分数（それ以上約分できない分数）の形に表すものとする。なお，問題文中の，例えば $\boxed{ア}$ は既出の $\boxed{ア}$ を表す。(40 点)

(1) N を 2 以上の自然数とする。1 から N までの番号が書かれた球が 1 個ずつあり，袋の中にこの N 個の球が入っている。この袋から同時に無作為に 2 個の球を取り出すことを考えよう。どの球を取り出す確率もすべて等しいものとして，次の問いに答えよ。ただし，k を 1 以上 N 以下の自然数とする。

(a) 取り出した球に書かれている大きい方の番号が k である確率は

$$\frac{\boxed{ア}N-\boxed{イ}k}{N^2-\boxed{ウ}N}$$

である。

(b) 取り出した球に書かれている小さい方の番号が k である確率は

$$\frac{\boxed{エ}N-\boxed{オ}k}{N^2-\boxed{カ}N}$$

である。

(c) 取り出した球に書かれている大きい方の番号の期待値は

$$\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}N+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}$$

である。

(d) 取り出した球に書かれている小さい方の番号の期待値は

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}N+\frac{\boxed{ス}}{\boxed{セ}}$$

である。

(2) a, b は実数の定数で，$a>0$ とする。座標平面上の曲線 C : $y=x^2-2|x|$ と直線 ℓ : $y=ax+b$ について，次のことが成り立つ。

$b \geqq -\boxed{\text{ソ}}$ のときは，a の値にかかわらず，C と ℓ はつねに共有点をもつ。

$b < -\boxed{\text{ソ}}$ のときは，C と ℓ が共有点をもたないような b の範囲は，a を用いて，

$$b < -\frac{1}{4}\left(\boxed{\text{タ}}a^2+\boxed{\text{チ}}a+\boxed{\text{ツ}}\right)$$

と表される。

$b=0$ のとき，C と ℓ の共有点の個数は，次のようになる。

$a < \boxed{\text{テ}}$ ならば $\boxed{\text{ト}}$ 個，$a \geqq \boxed{\text{テ}}$ ならば $\boxed{\text{ナ}}$ 個

(3) 空間において，ベクトル $(1, 1, 1)$ と同じ向きで，大きさが 1 のベクトルを

$$\vec{a} = \left(\sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}},\ \sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}},\ \sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ニ}}}} \right)$$

とおく。また，$\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 のベクトルのうち，y 成分と z 成分が負で等しいベクトルを

$$\vec{b} = \left(\sqrt{\frac{2}{\boxed{\text{ヌ}}}},\ -\sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}}},\ -\sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ネ}}}} \right)$$

とおく。$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の両方に垂直で，大きさが 1 のベクトルは 2 つ存在し，

$$\vec{c_1} = \left(\boxed{\text{ノ}},\ -\sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ハ}}}},\ \sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ヒ}}}} \right)$$

と

$$\vec{c_2} = \left(\boxed{\text{フ}},\ \sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ヘ}}}},\ -\sqrt{\frac{1}{\boxed{\text{ホ}}}} \right)$$

である。

2 つのベクトル $\vec{d_1}, \vec{d_2}$ を

$$\vec{d_1} = \sqrt{2}\,\vec{a} + \sqrt{3}\,\vec{b} + \sqrt{5}\,\vec{c_1}, \qquad \vec{d_2} = \sqrt{5}\,\vec{a} + \sqrt{2}\,\vec{b} + \sqrt{3}\,\vec{c_2}$$

とすると，その大きさは

$$|\vec{d_1}| = \sqrt{\boxed{\text{マ}\,\text{ミ}}},\quad |\vec{d_2}| = \sqrt{\boxed{\text{ム}\,\text{メ}}}$$

である。

問題 $\boxed{2}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{2}$ 2次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ が

$$A^2 \neq O, \quad B^2 \neq O, \quad AB = BA = O$$

を満たすとき，次の問いに答えよ。ただし，O は2次の零行列とする。　(30点)

(1) A は逆行列をもたないことを，背理法を用いて示せ。

(2) $A^2 = \alpha A$ となるような α を a, d の式で表せ。

(3) $A^2 = \alpha A$, $B^2 = \beta B$ となるような α, β に対し，$P = \dfrac{1}{\alpha}A + \dfrac{1}{\beta}B$ とおく。

(a) $P^2 - P$ を求めよ。

(b) $P = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ とおいたとき，$p + s$ の値を求めよ。

(c) P を求めよ。

問題 $\boxed{3}$ の解答は**解答用紙**に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

$\boxed{3}$ 実数 t に対して，$x = \cos 2t$，$y = \cos 3t$ とする。次の問いに答えよ。 (30 点)

(1) $\cos 2t - \cos 2(\pi - t)$ と $\cos 3t + \cos 3(\pi - t)$ を計算せよ。

(2) $0 < a < b < \pi$ で $\cos 2a = \cos 2b$ かつ $\cos 3a = \cos 3b$ を満たすような a，b の値を求めよ。

(3) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dx}{dt} < 0$ かつ $\dfrac{dy}{dt} < 0$ であるような t の値の範囲 T_1 と，$\dfrac{dx}{dt} < 0$ かつ $\dfrac{dy}{dt} > 0$ であるような t の値の範囲 T_2 をそれぞれ求めよ。

(4) t が $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲を動くとき，**(1)**，**(2)**，**(3)** の結果に注意して，点 $(x,\ y)$ が描く曲線の概形を図示せよ。

(5) y^2 を x の多項式で表せ。

(6) **(4)** の曲線で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。