

平成 25 年度

〔試験時間 80 分〕

R 2 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 2 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものが採点されます。
- (4) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (5) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 **1** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

1 実数 x と自然数 n に対して、 $u_n(x) = x^n - 2x^{2n+1}$ とおく。次の問いに答えよ。

(50 点)

(1) $0 \leq x < 1$ のとき、和 $f(x) = 1 - 2x + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ を求めよ。 $(x$ の 1 つの既約分数式に整理して答えよ。)

(2) (1) で求めた $f(x)$ に対して、区間 $0 \leq x \leq 1$ における関数 $g(x)$ を

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) & (x = 1) \end{cases}$$

により定める。 $g(1)$ の値を求めよ。さらに $\int_0^1 g(x) dx$ を求めよ。

(3) $\int_0^1 u_n(x) dx$, $\int_0^1 |u_n(x)| dx$ をそれぞれ求めよ。

(4) 区間 $0 \leq x \leq 1$ における $u_n(x)$ の最大値を M_n とし、そのときの x の値を α_n とする。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。

(a) α_n を求めよ。

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \log \alpha_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ をそれぞれ求めよ。

(c) $\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha_n)^n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} M_n$ をそれぞれ求めよ。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2 a, b を正の定数とする。楕円 $\frac{x^2}{4b^2} + \frac{(y-a)^2}{b^2} = 1$ と放物線 $y = x^2$ の共有点の個数 k について調べよう。変数 z の 2 次式を $f(z) = \frac{z}{4b^2} + \frac{(z-a)^2}{b^2} - 1$ とし、次の問いに答えよ。(50 点)

(1) $f(z) = 0$ の異なる正の解の個数を m とする。次の 2 つの場合に分けて、可能な m と k の値の組 (m, k) をすべて求めよ。

(a) $f(0) = 0$ のとき

(b) $f(0) \neq 0$ のとき

(2) $a = b$ のとき、

(a) $f(z) = 0$ が正の解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(b) $k = 3$ となるような a の値の範囲と、 $k = 1$ となるような a の値の範囲をそれぞれ求めよ。

(3) $a < b$ のとき、

(a) $f(z) = 0$ の異なる正の解と、異なる負の解はそれぞれいくつあるか。

(b) k の値を求めよ。

(4) $a > b$ のとき、

(a) $f(z) = 0$ が異なる正の解をただ 1 つもつとき、その解は重解であることを示せ。

(b) $k = 2$ となるとき、 a の値の範囲を求めよ。また、そのときの b の値を a の式で表せ。