

U 1 数 学

この冊子は、数学の問題で1ページより5ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横1行について1箇所に限ります。2箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

1. The first part of the paper is devoted to the study of the properties of the function $f(x)$ defined by the equation

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt, \quad (1)$$

where x is a real number. It is well known that the function $f(x)$ is increasing and concave down on the interval $(-\infty, \infty)$. Moreover, the function $f(x)$ is bounded on the interval $(-\infty, \infty)$ and its range is the interval $(0, \pi/2)$. The function $f(x)$ is also continuous and differentiable on the interval $(-\infty, \infty)$ and its derivative is given by the equation

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}. \quad (2)$$

It is easy to see that the function $f(x)$ is a solution of the differential equation

$$y' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (3)$$

with the initial condition $y(0) = 0$. The function $f(x)$ is also a solution of the differential equation

$$y'' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}. \quad (4)$$

問題

1

の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1

次の (1), (2), (3) においては, 内の 1 つのカタカナに 0 から 9 までの数字が 1 つあてはまる。その数字を解答用マークシートにマークしなさい。与えられた枠数より少ない桁の数があてはまる場合は, 上位の桁を 0 とし, 右に詰めた数値としなさい。分数は既約分数とし, 値が整数の場合は分母を 1 としなさい。根号を含む形で解答する場合は, 根号の中に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

(50 点)

(1) 点 O を原点とする座標平面において, 直線 $\ell: y = 2x + 1$ と

放物線 $C: 2y^2 = a(x+1)$ を考える。ただし, a は実数の定数である。

直線 ℓ と放物線 C が異なる 2 点で交わるのは,

$$a > \boxed{\text{ア}}, \quad a < -\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}$$

のときである。このとき, 直線 ℓ と放物線 C の 2 つの交点を P, Q とする。

点 O, P, Q を頂点とする三角形が直角三角形となるのは,

$$a = \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}, \quad a = \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}} \boxed{\text{ク}}}$$

のときである。

右のページは白紙です。

(2) 実数 x の関数 $f(x) = \int_0^x (2x + 3t) \sin t \, dt$ に対して,

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \boxed{\text{ア}}\pi + \boxed{\text{イ}}$$

である。

また、 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ に対して,

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\pi + \boxed{\text{オ}}$$

である。

右のページは白紙です。

(3) 数列 $a_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{2nP_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の極限値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\boxed{\text{ア}}}{e}$$

である。

数列 $b_n = \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{4nP_{2n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の極限値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\boxed{\text{イ} \quad \text{ウ}}}{e^2}$$

である。

数列 $c_n = \sqrt[n]{\frac{8nP_{4n}}{6nP_{4n}}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の極限値は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{\boxed{\text{エ} \quad \text{オ} \quad \text{カ} \quad \text{キ}}}{\boxed{\text{ク} \quad \text{ケ} \quad \text{コ}}}$$

である。

ただし, ${}_mP_r = \frac{m!}{(m-r)!}$ であり, e は自然対数の底である。また, 記号 $\sqrt[n]{}$ は n 乗根を表す。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は解答用紙 2 に記入しなさい。

2 以下の問いに答えなさい。

(25 点)

(1) 条件 $x = \tan^2 y$ を満たす、実数 x について微分可能な x の関数 y を考える。

ただし、 $\frac{\pi}{2} < y < \pi$ とする。

(a) $x = 3$ のとき、 y の値を求めなさい。

(b) $\frac{dy}{dx}$ および $\frac{d^2y}{dx^2}$ を x の式で表しなさい。

(2) n を自然数とし、 $x = \frac{1}{2} \left(\sqrt[n]{5} - \frac{1}{\sqrt[n]{5}} \right)$ とする。このとき、 $\left(x + \sqrt{1+x^2} \right)^n$

の値を求めなさい。ただし、記号 $\sqrt[n]{}$ は n 乗根を表す。

右のページは白紙です。

問題 3 の解答は解答用紙 3 に記入しなさい。

3 座標平面において、楕円 $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{2} = 1$ 上に点 $P(\alpha, \beta)$ をとる。楕円の2つの焦点を F_1, F_2 とする。

(25 点)

(1) $\angle F_2PF_1 = \theta$ ($0 \leq \theta < \pi$) とする。

(a) $\theta > \frac{\pi}{2}$ となるように点 P をとるとき、 α がとりうる値の範囲を求めなさい。

(b) $\theta < \frac{\pi}{3}$ となるように点 P をとるとき、 α がとりうる値の範囲を求めなさい。

(2) $|PF_2 - PF_1| < 3$ となるように点 P をとるとき、 α がとりうる値の範囲を求めなさい。

