

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。

1

(1) 次の条件を満たす数列 $\{a_n\}$ を考える。

条件: ある定数 k があって、点 (n, a_n) ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて

直線 $y = -5x + k$ の上にある。

このとき、 $\{a_n\}$ は公差 $-\text{ア}$ の等差数列である。 $\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n a_i$ の値が n によらず

一定となるのは $k = \frac{\text{イ}}{\text{ウ}}$ のときであり、その値は $-\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。

(2) 次の条件を満たす数列 $\{b_n\}$ を考える。

条件: ある定数 ℓ があって、点 $(n, \log_2 b_n)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) はすべて

直線 $y = -5x + \ell$ の上にある。

このとき、 $\{b_n\}$ は公比 $\frac{\text{カ}}{\text{キク}}$ の等比数列である。 $\sum_{i=1}^n b_i \leq 1$ がすべての n に

対して成り立つためには、 $\ell \leq \log_2 \text{ケコ}$ であることが必要十分である。

(25 点)

右のページは白紙です。

2 n を自然数とする。 $0 \leq r \leq n$ を満たす整数 r に対して、 $f_n(r) = \frac{4^r 2^{n-r}}{r!(n-r)!}$ 、 $g_n(r) = \frac{5^r}{r!(n-r)!}$ とおく。ただし、 $0! = 1$ であるとする。

(1) $r \leq n-1$ のとき、 $f_n(r) < f_n(r+1)$ が成り立つためには、

$$r < \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} (\boxed{\text{ウ}}^{n-1})$$

であることが必要十分である。また、 $g_n(r) < g_n(r+1)$ が成り立つためには、

$$r < \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} (\boxed{\text{カ}}^{n-1})$$

であることが必要十分である。

(2) $n = 10$ とする。

(a) $f_{10}(r)$ が最大になるのは $r = \boxed{\text{キ}}$ のときである。また、 $g_{10}(r)$ が最大になるのは $r = \boxed{\text{ク}}$ のときである。

(b)

$$\sum_{r=0}^{10} f_{10}(r) = \frac{2\boxed{\text{ケ}}3\boxed{\text{コ}}}{5\boxed{\text{サ}}7}$$

である。また、

$$\sum_{r=0}^{10} g_{10}(r) = \frac{2\boxed{\text{シ}}3\boxed{\text{ス}}}{5\boxed{\text{セ}}7}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

- 3 座標空間において、3点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ をとり、線分 AC を p : $1-p$ に内分する点を P とする。ただし、 $0 < p < 1$ とする。

- (1) 線分 BC 上に点 Q が、線分 AQ と線分 BP が直交するようにとれるためには、

$$\frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}} \leq p < \boxed{\text{ウ}} \text{ であることが必要十分である。そのような } Q \text{ がとれるとき、}$$

$$\frac{BQ}{BC} = q \text{ とおく。そのとき、} (p+1)(q+1) = \boxed{\text{エ}} \text{ が成り立ち、}$$

$$PQ^2 = \boxed{\text{オ}}(p^2 + q^2) - \boxed{\text{カ}}$$

となる。さらに、 PQ が最小となるのは、 $p = \sqrt{\boxed{\text{キ}}} - \boxed{\text{ク}}$ のときで、このとき

$$PQ^2 = \boxed{\text{ケ}}\boxed{\text{コ}} - \boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

- (2) 点 $D(1, 1, 1)$ をとる。線分 AB を $1:2$ に内分する点を E とし、線分 CD を $1:2$ に内分する点を F とする。点 P に対して、線分 BD 上の点 R を、線分 EF と線分 PR が交わるようにとる。このとき

$$PR^2 = \boxed{\text{ス}}p^2 - \boxed{\text{セ}}p + \boxed{\text{ソ}}$$

である。

(25 点)

右のページは白紙です。

4 k は正の定数として $f(x) = -x^2 + kx$ とおき、 xy 平面における放物線 $C: y = f(x)$ の上の点 P に対し、次の条件 (*) を考える。

(*) : P における C の法線 (すなわち、 P を通り、 P における C の接線と垂直な直線) は、原点 O を通る。

(1) 条件 (*) を満たす P が、 C 上に3つあるような k の値の範囲は

$$k > \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}} \dots\dots (**)$$

である。

k が (**) の範囲にあるとき、条件 (*) を満たす3つの点のうち O と異なる点を P_1, P_2 とし、それらの x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とする。さらに領域 $\alpha \leq x \leq \beta$ において、放物線 C と x 軸、および2直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれた図形の面積を S とし、直線 P_1P_2 と x 軸、および2直線 $x = \alpha, x = \beta$ で囲まれた図形の面積を T とする。

$$(2) \quad \alpha + \beta = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} k, \quad \alpha\beta = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} (k^2 + \boxed{\text{キ}}) \text{ である。}$$

$$(3) \quad \angle P_1OP_2 \text{ が } 45^\circ \text{ になるのは、} k = \sqrt{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}} \text{ のときである。}$$

$$\text{そのとき、} \frac{T}{S} = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \text{ である。}$$

(25 点)

右のページは白紙です。

