

D 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したものと及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ン までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表し、比はもっとも簡単な整数の比で表しなさい。なお、サ などは既出の サ を表す。

(40 点)

(1) 媒介変数 t を用いて表される座標平面上の 2 つの曲線を考える。ただし、(b) で $\log$ は自然対数である。

(a) 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = t - \frac{6}{t} \\ y = \frac{1}{2} \left(t + \frac{6}{t} \right) \end{cases} \quad (t \neq 0)$$

と表される曲線について、 t を消去して得られる x と y の関係式は

$$\frac{y^2}{\text{ア}} - \frac{x^2}{\text{イ ウ}} = 1$$

である。

(b) 媒介変数 t を用いて

$$\begin{cases} x = t - \frac{6}{t} - 6 \\ y = \log \left(t + \frac{6}{t} \right) - 1 \end{cases} \quad (t > 0)$$

と表される別の曲線を考える。 t を消去して得られる x と y の関係式は

$$y = \frac{1}{\text{エ}} \log \left(\text{オ} x^2 + \text{カ キ} x + \text{ク ケ} \right) - 1$$

である。この曲線上の点で、接線の傾きが $\frac{1}{10}$ となる点の x 座標は コ または $-\text{サ}$ である。 $x = -\text{サ}$ となる正の数 t は

$$t = \text{シ} + \sqrt{\text{ス セ}}$$

である。

右のページは白紙です。

(2) θ を $0 \leq \theta < \pi$ を満たす実数として、 x についての 2 次方程式

$$x^2 - 2(\sin \theta + \cos \theta)x + \frac{13}{8} \cos^2 2\theta = 0 \quad (*)$$

を考える。

(a) $\theta = \frac{\pi}{12}$ のとき、方程式 (*) の解は

$$x = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タ}}} \pm \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} \sqrt{2}$$

である。

(b) 方程式 (*) が 2 つの異なる実数解をもつための必要十分条件は

$$13 \sin^2 2\theta + 8 \sin 2\theta - \boxed{\text{テ}} > 0$$

が成り立つことであり、したがって

$$\frac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}} \boxed{\text{ニ}}} < \sin 2\theta \leq 1 \quad (**)$$

が成り立つことである。 θ が $0 \leq \theta < \pi$ と (**) を満たすとき、 $\cos \theta$ の値の範囲は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}} \sqrt{\boxed{\text{ノ}} \boxed{\text{ハ}}} < \cos \theta < \frac{\boxed{\text{ヒ}}}{\boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}} \sqrt{\boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

(3) 平面上に $\triangle ABC$ と点 O があり,

$$\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \vec{0}$$

を満たすとする。直線 AO と辺 BC の交点を P , 直線 CO と辺 AB の交点を Q とする。また, 点 O を通り直線 AB に平行な直線が辺 AC , 辺 BC と交わる点を, それぞれ M , N とする。このとき,

$$\overrightarrow{AO} = \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}} \overrightarrow{AC}$$

であり,

$$BP : PC = \boxed{\text{ヤ}} : \boxed{\text{ユ}}, \quad AO : OP = \boxed{\text{ヨ}} : \boxed{\text{ラ}}$$

である。また $CO : OQ = \boxed{\text{リ}} : \boxed{\text{ル}}$ であり

$$\overrightarrow{MN} = \frac{\boxed{\text{レ}}}{\boxed{\text{ロ}}} \overrightarrow{AB}$$

である。ゆえに $BN : NP : PC = \boxed{\text{ワ}} : \boxed{\text{ヲ}} : \boxed{\text{ン}}$ となる。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 関数 $f(x) = e^{-x}$ および 座標平面上の曲線 $C: y = f(x)$ を考える。ここで、 e は自然対数の底である。 C 上の点 $(a, f(a))$ ($a > 0$) における接線を ℓ とする。原点を O 、 ℓ と x 軸の交点を P 、 ℓ と y 軸の交点を Q とし、三角形 OPQ の面積を $S(a)$ とする。また、曲線 C 、直線 ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を $T(a)$ とする。

- (1) 2 点 P 、 Q の座標をそれぞれ a を用いて表せ。
- (2) a が $a > 0$ の範囲で動くとき、 $S(a)$ の最大値を求めよ。
- (3) $e^a(1 - T(a))$ を求めよ。
- (4) $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ を次のように定める。 $a_1 = a$ とし、 $n \geq 2$ のとき、点 $(a_{n-1}, f(a_{n-1}))$ における C の接線と x 軸との交点の x 座標を a_n とする。
 $s_n = \sum_{k=1}^n f(a_k)$ とおくとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 1 回行うごとに、勝ち負けが必ず定まるゲームがある。1 回のゲームで勝つ確率と負ける確率は、それぞれ $\frac{1}{2}$ であるとする。このゲームを繰り返し行う。
 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、 n 回目のゲームの得点 q_n を以下のように定める。まず、1 回目のゲームで勝ったときは $q_1 = 1$ 、負けたときは $q_1 = -1$ とする。 $n \geq 2$ に対しては次のように定める。 $(n-1)$ 回目のゲームで勝っていた場合、 n 回目のゲームで勝てば $q_n = 1$ 、負ければ $q_n = -1$ とする。 $(n-1)$ 回目のゲームで負けていた場合、 n 回目のゲームで勝てば $q_n = -2q_{n-1}$ 、負ければ $q_n = 2q_{n-1}$ とする。

例えば、1 回目のゲームに勝ち、2 回目から 4 回目までのゲームにすべて負け、5 回目から 7 回目までのゲームにすべて勝ったとすると、

$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7) = (1, -1, -2, -4, 8, 1, 1)$$

となる。

$$S_n = \sum_{k=1}^n q_k \text{ とおくと、以下の問いに答えよ。}$$

- (1) ゲームを 3 回行うとする。 $S_3 \geq 0$ となる確率を求めよ。
(2) n 回目のゲームに勝ち、 $(n+1)$ 回目から $(n+m)$ 回目までのゲームにすべて負け、 $(n+m+1)$ 回目のゲームに勝ったとする。このとき、

$$T = q_{n+1} + q_{n+2} + \cdots + q_{n+m} + q_{n+m+1}$$

を求めよ。ただし、 n, m は 1 以上の整数とする。

- (3) ゲームを 7 回行うとする。7 回目のゲームに勝ち、かつ $S_7 = 3$ となる確率を求めよ。
(4) ゲームを 7 回行うとする。 $S_7 \geq 0$ となる確率を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。