

E 1

数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

(注 意)

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートには受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

1945

1945

1945

1945

1945

1945

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ロ までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、オ カ などは既出の オ カ を表す。

(40 点、ただし数学科は 60 点)

(1) 1 つの袋に、S、T、U の 3 種類のカードがそれぞれ s 枚、 t 枚、 u 枚ずつ入っている。ただし s, t, u は 3 以上の整数である。この袋からカードを 1 枚ずつ 3 枚取り出して、取り出した順に並べる。ただし、取り出したカードはもとに戻さない。次のことが成り立っているとする。

(i) 1 枚目のカードが T となる確率は $\frac{1}{6}$ である。

(ii) 1 枚目のカードが T で、かつ、2 枚目のカードが T となる確率は $\frac{1}{39}$ である。

(iii) 並べたカードが 1 枚目から順に T U S となる確率は $\frac{1}{40}$ である。

(iv) 並べたカードが S S S となる確率は $\frac{1}{8}$ より大きい。

このとき、(i), (ii) より

$$t = \text{ア} \text{ イ}, s + u = \text{ウ} \text{ エ}$$

であることがわかる。さらに (iii) より

$$(s, u) = (\text{オ} \text{ カ}, \text{キ} \text{ ク}) \text{ または } (s, u) = (\text{ケ} \text{ コ}, \text{サ} \text{ シ})$$

であることがわかる。ただし オ カ < ケ コ とする。さらに (iv) より

$$(s, u) = (\text{ス} \text{ セ}, \text{ソ} \text{ タ})$$

であることがわかる。

右のページは白紙です。

(2) n を 1 以上の整数, e を自然対数の底とする。関数

$$f_n(x) = \left(\frac{x}{6}\right)^n e^{n-x} \quad (x \geq 0)$$

を考えると, $f_n(x)$ の $x \geq 0$ での最小値は である。また, $f_n(x)$ の $x \geq 0$ での最大値は, $n=1$ のとき $\frac{\text{ツ}}{\text{テ}}$, $n=2$ のとき $\frac{\text{ト}}{\text{ナ}}$, $n=3$ のとき $\frac{\text{ニ}}{\text{ヌ}}$ となる。次に関数

$$g_n(x) = \sin\left(\frac{x}{6} e^{1-\frac{x}{n}}\right) \quad (x \geq 0)$$

$$h_n(x) = \frac{x}{6} e^{1-\frac{x}{n}} \quad (x \geq 0)$$

を考える。 $h_n(x)$ の $x \geq 0$ での最小値は であり, 最大値は $\frac{\text{ノ}}{\text{ハ}} n$ である。

したがって, $g_n(x)$ の $x \geq 0$ での最小値が -1 かつ最大値が 1 となるような最小の n は である。

右のページは白紙です。

- (3) 座標平面上の2点 $P(3, 0)$, $Q(2 \cos \theta, 2 \sin \theta)$ ($0 \leq \theta < \pi$) について,
 d を原点 $(0, 0)$ と直線 PQ の距離とすると,

$$d^2 = \frac{\boxed{\text{ヘ}} \boxed{\text{ホ}} \sin^2 \theta}{\boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}} - \boxed{\text{ム}} \boxed{\text{メ}} \cos \theta}$$

である。 d^2 は $\cos \theta = \frac{\boxed{\text{モ}}}{\boxed{\text{ヤ}}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ユ}}$ をとり、このとき直線 PQ の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}} \sqrt{\boxed{\text{リ}}} x + \frac{\boxed{\text{ル}}}{\boxed{\text{レ}}} \sqrt{\boxed{\text{ロ}}}$$

である。

右のページは白紙です。

問題 **2** の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 実数 a, b に対し、関数 $f(x)$ を

$$f(x) = x^3 + ax + b$$

と定め、座標平面において曲線 $C: y = f(x)$ と、 C 上の点 $P(t, f(t))$ を考える。ただし、 $t \neq 0$ とする。直線 ℓ は点 P を通り、 P と異なる点 Q で曲線 C と接しているとする。さらに、直線 ℓ' は点 Q を通り、 Q と異なる点 R で曲線 C と接しているとする。

- (1) 点 Q の x 座標 q を、 t を用いて表せ。また、直線 ℓ の傾き m と y 切片 k を、 t, a, b を用いて表せ。
- (2) $t > 0$ の場合に、 $x \geq 0$ において、曲線 C 、直線 ℓ 、 y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とおき、 $x \leq 0$ において、曲線 C 、直線 ℓ 、 y 軸で囲まれた図形の面積を S_2 とおく。 S_1, S_2 を、それぞれ t を用いて表せ。
- (3) 直線 ℓ' の方程式が $y = 0$ のとき、 a, b を、それぞれ t を用いて表せ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

問題

3

の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3

座標平面において、行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の表す 1 次変換により、点 $(1, 2)$ が点 $(3, 5)$ に移され、点 $(1, 1)$ が直線 $y = x$ 上に移されるとする。さらに $ad - bc = 4$ とする。

(1) A を求めよ。

数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

によって定める。

(2) $y_n - x_n$ を n を用いて表せ。

(3) $\frac{x_n}{2^n}$ を n を用いて表せ。

(4) x_n と y_n を n を用いて表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$ を求めよ。

(30 点、ただし数学科は 45 点)

右のページは白紙です。

