

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	9	1	9	2	8	1	2
(2)	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	
	3	9	3	1	4	3	
	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	
	4	7	1	2	1	0	
(3)	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	
	2	3	4	3	8	3	
	ハ	ヒ	フ				
	1	2	3				

【解説】

- (1)(a)
- カードを1枚抜き出す場合の期待値は、
- $$\frac{1+2+3+4+5+6+7+8}{8}=\frac{9}{2}$$
- である。したがって、2枚同時に取り出す場合の期待値は $2\cdot\frac{9}{2}=9$ 枚である。
- (b)
- カードの抜き出し方は ${}_8C_2=28$ 通りである。以下、余事象を考える。すると、2つの番号の和が8未満となるようなカードの組み合わせ方として、
- (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6)
- (2, 3), (2, 4), (2, 5)
- (3, 4)
- の9通りが考えられる。したがって、求める確率は、
- $$1-\frac{9}{28}=\frac{19}{28}$$
- となる。
- (c)
- 2つの番号の積が4の倍数とならないようなカードの抜き出し方として、2枚とも奇数のカードを取り出した場合と、奇数のカード1枚と2, 6のいずれかを1枚の計2枚を取り出した場合が考えられる。この余事象を考え、求める確率は、
- $$1-\frac{{}_4C_2+{}_4C_1\cdot{}_2C_1}{28}=\frac{1}{2}$$
- となる。

(2)(a)

- それぞれ展開して整理すると、
- $$x^3+(a+\alpha)x^2+(b+\alpha a)x+\alpha b=x^3+cx^2+39x+56 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$
- $$x^3+(a+\beta)x^2+(b+\beta a)x+\beta b=x^3+dx^2+31x+42 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$
- となる。①、②式は x についての恒等式であるから、それぞれについて1次の係数を比較することにより、
- $$\begin{cases} b+\alpha a=39 \\ b+\beta a=31 \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{3}$$
- が得られる。また、同様にして定数項を比較することにより、
- $$\begin{cases} \alpha b=56 \\ \beta b=42 \end{cases} \qquad \cdots \cdots \textcircled{4}$$
- $$\therefore \frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha b}{\beta b}=\frac{56}{42}=\frac{4}{3}$$
- が得られる。

- (b)
- $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{4}{3}$ より、 $3\alpha=4\beta$ であるから、③式より α, β, a を消去すると、
- $$b=7$$
- となる。これを④式に代入して、
- $$\alpha=8, \beta=6$$
- となるから、③式より、
- $$a=4$$
- となる。①、②式のそれぞれについて、2次の係数を比較すると、
- $$\begin{cases} a+\alpha=c \\ a+\beta=d \end{cases}$$
- となるから、
- $$c=12, d=10$$
- である。

(3)(a)

- [1] $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき
- $\cos x \geq 0$ であるから、 $f(x)=0$ である。したがって、この範囲では $f(x)=1$ とならない。
- [2] $\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3}{2}\pi$ のとき
- $\cos x \leq 0$ であるから、
- $$f(x)=-\cos x-\cos x=-2\cos x$$
- である。したがって、
- $$\begin{aligned} -2\cos x &= 1 \\ \Leftrightarrow \cos x &= -\frac{1}{2} \\ \therefore x &= \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$
- である。
- [3] $\frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{2}\pi$ のとき
- $\cos x \geq 0$ であるから、 $f(x)=0$ である。したがって、この範囲では $f(x)=1$ とならない。
- [4] $\frac{5}{2}\pi < x \leq \frac{7}{2}\pi$ のとき
- 周期性により、 $x=\frac{8}{3}\pi, \frac{10}{3}\pi$ は $f(x)=1$ の解となる。
- 以上[1]から[4]より、 $a_1=\frac{2}{3}\pi, a_2=\frac{4}{3}\pi, a_3=\frac{8}{3}\pi$ である。

- (b)
- 求める定積分は、
- $$\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{8}{3}\pi} f(x)\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)dx$$
- である。周期性より、積分区間を $\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}\pi$ としてもよく、(a)の結果より、 $\frac{3}{2}\pi < x \leq \frac{5}{2}\pi$ のとき $f(x)=0$ であるから、
- $$\begin{aligned} \int_{\frac{2}{3}\pi}^{\frac{8}{3}\pi} f(x)\sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -2\cos x \sin\left(x+\frac{4}{3}\pi\right)dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} -2\cos x \left(-\frac{1}{2}\sin x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left(\sin x \cos x + \sqrt{3}\cos^2 x\right)dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \left\{\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}(\cos 2x + 1)\right\}dx \\ &= \left[-\frac{1}{4}\cos 2x + \frac{\sqrt{3}}{4}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\pi \end{aligned}$$
- となる。

(1)

$f(x) = 2x - xe^{-x}$ とおく。

$$f'(x) = 2 - e^{-x} + xe^{-x} = (x-1)e^{-x} + 2$$

となるので、 C 上の点 $A(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$y = \{(a-1)e^{-a} + 2\}(x-a) + (2a - ae^{-a})$$

$$\therefore y = \{(a-1)e^{-a} + 2\}x - a^2e^{-a}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = \{(a-1)e^{-a} + 2\}x - a^2e^{-a}$$

(2)

連立方程式

$$\begin{cases} y = 2x \\ y = \{(a-1)e^{-a} + 2\}x - a^2e^{-a} \end{cases}$$

から、 y を消去して、 x を求めると、 $a > 1$ に注意して、

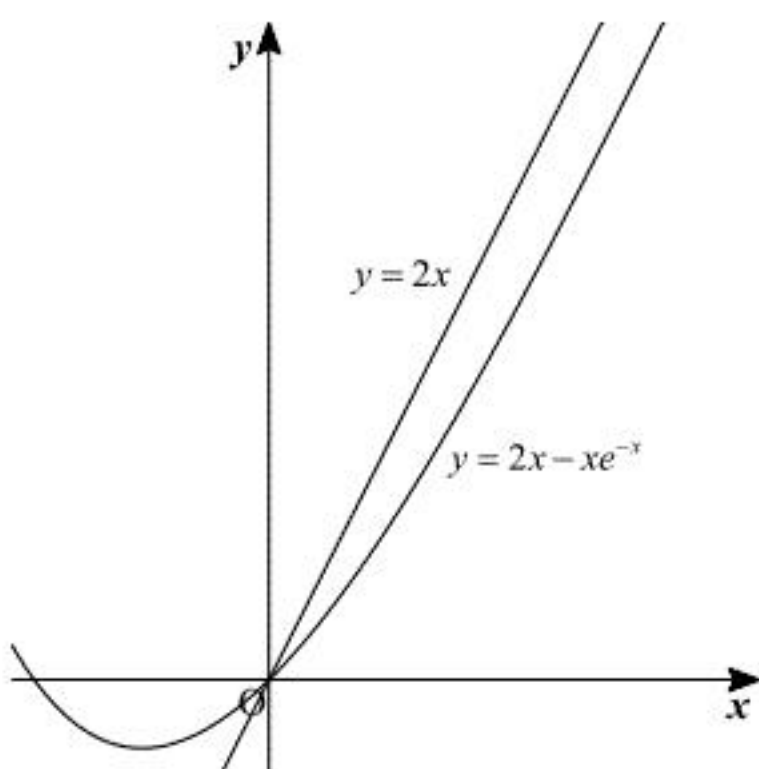
$$x = \frac{a^2e^{-a}}{(a-1)e^{-a}} = \frac{a^2}{a-1}$$

となる。これが、直線 ℓ と点 A における接線の交点 P の x 座標 p である。

$$(\text{答}) \quad p = \frac{a^2}{a-1}$$

(3)

曲線 C と直線 ℓ を図示すると、以下のようになる。



$x > 0$ において、 $xe^{-x} > 0$ であることから、直線 ℓ は常に曲線 C の上側にある。また、

$$p = \frac{a^2}{a-1} > a \text{ であることに注意する。}$$

(a)

AB を底辺として考えれば、

$$\begin{aligned} T(a) &= \frac{1}{2} \cdot \{2a - (2a - ae^{-a})\} \cdot (p - a) \\ &= \frac{a^2e^{-a}}{2(a-1)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad T(a) = \frac{a^2e^{-a}}{2(a-1)}$$

(b)

$$\begin{aligned} S(a) &= \int_a^p \{2x - (2x - xe^{-x})\} dx \\ &= \int_a^p xe^{-x} dx \\ &= \left[x \cdot (-e^{-x}) \right]_a^p + \int_a^p 1 \cdot e^{-x} dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_a^p \\ &= (a+1)e^{-a} - \frac{a^2+a-1}{a-1} e^{-\frac{a^2}{a-1}} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S(a) = (a+1)e^{-a} - \frac{a^2+a-1}{a-1} \cdot e^{-\frac{a^2}{a-1}}$$

(c)

$$\begin{aligned} \frac{S(a)}{T(a)} &= \frac{2(a-1)}{a^2e^{-a}} \cdot \left\{ (a+1)e^{-a} - \frac{a^2+a-1}{a-1} \cdot e^{-\frac{a^2}{a-1}} \right\} \\ &= \frac{2(a^2-1)}{a^2} - \frac{2(a^2+a-1)}{a^2} e^{-\frac{a^2}{a-1}} \\ &= 2\left(1 - \frac{1}{a^2}\right) - 2\left(1 + \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}\right) e^{-1-\frac{1}{a-1}} \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{T(a)} &= 2(1-0) - 2(1+0-0)e^{-1-0} \\ &= 2 - \frac{2}{e} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{S(a)}{T(a)} = 2 - \frac{2}{e}$$

3

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は

$$\tan a_n = \frac{1}{n^2 + n + 1} \left(0 < a_n < \frac{\pi}{2} \right) \qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$\tan b_n = \alpha n + \beta \left(-\frac{\pi}{2} < b_n < \frac{\pi}{2} \right) \qquad \cdots \textcircled{2}$$

$$\tan a_n = \tan(b_{n+1} - b_n) \qquad \cdots \textcircled{3}$$

を満たす。 ($n=1, 2, 3, \dots$)

(1)

$\tan$ の加法定理を用いると、 $\textcircled{2}, \textcircled{3}$ 式より、

$$\begin{aligned} \tan a_n &= \tan(b_{n+1} - b_n) \\ &= \frac{\tan b_{n+1} - \tan b_n}{1 + \tan b_{n+1} \tan b_n} \\ &= \frac{\{\alpha(n+1) + \beta\} - (\alpha n + \beta)}{1 + \{\alpha(n+1) + \beta\}(\alpha n + \beta)} \\ &= \frac{\alpha}{\alpha^2 n^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)n + (\alpha\beta + \beta^2 + 1)} \end{aligned}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ 式より、

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\alpha^2 n^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)n + (\alpha\beta + \beta^2 + 1)} &= \frac{1}{n^2 + n + 1} \\ \Leftrightarrow (\alpha^2 - \alpha)n^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha)n + (\alpha\beta + \beta^2 - \alpha + 1) &= 0 \qquad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

が任意の自然数 n について成立するから、 $\textcircled{4}$ 式の各項の係数は 0 に等しくなり、

$$\begin{cases} \alpha^2 - \alpha = 0 & \cdots \textcircled{5} \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta - \alpha = 0 & \cdots \textcircled{6} \\ \alpha\beta + \beta^2 - \alpha + 1 = 0 & \cdots \textcircled{7} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{5}$ より、

$$\alpha = 0, 1$$

が候補となるが、 $\alpha = 0$ のときは $\textcircled{7}$ を満たさないから不適である。一方、 $\alpha = 1$ のときは、 $\textcircled{6}$ より $\beta = 0$ となり、これらは $\textcircled{7}$ も満たすから適する。したがって、

$$\alpha = 1, \beta = 0$$

である。

(答) $\alpha = 1, \beta = 0$

(2)

(1)と $\textcircled{2}$ 式より、

$$\tan b_1 = 1 \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < b_1 < \frac{\pi}{2}$$

となるから、 $b_1 = \frac{\pi}{4}$ と求まる。

(答) $b_1 = \frac{\pi}{4}$

(3)

まず、(1)と $\textcircled{2}$ 式より、任意の自然数 n に対して

$$\tan b_n = n (> 0) \quad \text{かつ} \quad -\frac{\pi}{2} < b_n < \frac{\pi}{2}$$

であるから、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であることがわかる。よって、問題で与えられた不等式を用いることができ、このとき、

$$(0 <) \frac{\pi}{2} - b_n < \tan\left(\frac{\pi}{2} - b_n\right)$$

が成立する。ここで、

$$\begin{aligned} \tan\left(\frac{\pi}{2} - b_n\right) &= \frac{1}{\tan b_n} \\ &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

となり、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ であるから、はさみうちの原理より

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2} - b_n\right) &= 0 \\ \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} b_n &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

となることがわかる。

(答) $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{\pi}{2}$

(4)

(3)の解説より、 $0 < b_n < \frac{\pi}{2}$ であることがわかっていて、さらに関数 $\tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で単調増加関数であるから、 $\tan b_{n+1} = n+1, \tan b_n = n$ より、

$$0 < b_{n+1} - b_n \left(< \frac{\pi}{2} \right) \qquad \cdots \textcircled{5}$$

であることがわかる。また、関数 $y = \tan x$ は $0 < x < \frac{\pi}{2}$ の範囲で 1 対 1 に対応する関数であるから、 $\textcircled{3}$ 式、 $\textcircled{5}$ 式より、

$$a_n = b_{n+1} - b_n$$

となることがわかる。したがって、求めたい無限級数の第 N 部分和は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N a_n &= \sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_n) \\ &= b_{N+1} - b_1 \end{aligned}$$

となるから、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{N \rightarrow \infty} (b_{N+1} - b_1) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \left(\because (2), (3) \right) \\ &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\pi}{4}$

(5)

$b_0 = 0$ とすると、(1)の結果は $n = 0$ のときも成立することが確認できる。よって、 $\tan$ の加法定理と(1)の結果より、任意の自然数 n に対して、

$$\begin{aligned} \tan(b_{n+1} - b_{n-1}) &= \frac{\tan b_{n+1} - \tan b_{n-1}}{1 + \tan b_{n+1} \tan b_{n-1}} \\ &= \frac{(n+1) - (n-1)}{1 + (n+1)(n-1)} \\ &= \frac{2}{n^2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\tan(b_{n+1} - b_{n-1}) = \frac{2}{n^2}$

(6)

無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_{n-1})$ の第 N 部分和は、

$$\sum_{n=1}^N (b_{n+1} - b_{n-1}) = b_{N+1} + b_N - b_1 - b_0$$

となるから、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_{n-1})$ は、

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_{n-1}) &= \lim_{N \rightarrow \infty} (b_{N+1} + b_N - b_1 - b_0) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} - 0 \\ &= \frac{3}{4} \pi \end{aligned}$$

と計算できる。

(答) $\sum_{n=1}^{\infty} (b_{n+1} - b_{n-1}) = \frac{3}{4} \pi$