

【解答】

- (1)(a) ア 9 イ 3
 (b) ウ 2 エ 4
 (2) オ 9 カ 1 キ 6
 ク 9
 (3)(a) ケ 5 コ 6 サ 0
 (b) シ 1 ス 4 セ 0
 (c) ソ 3 タ 6 チ 0

【解説】

(1)(a)

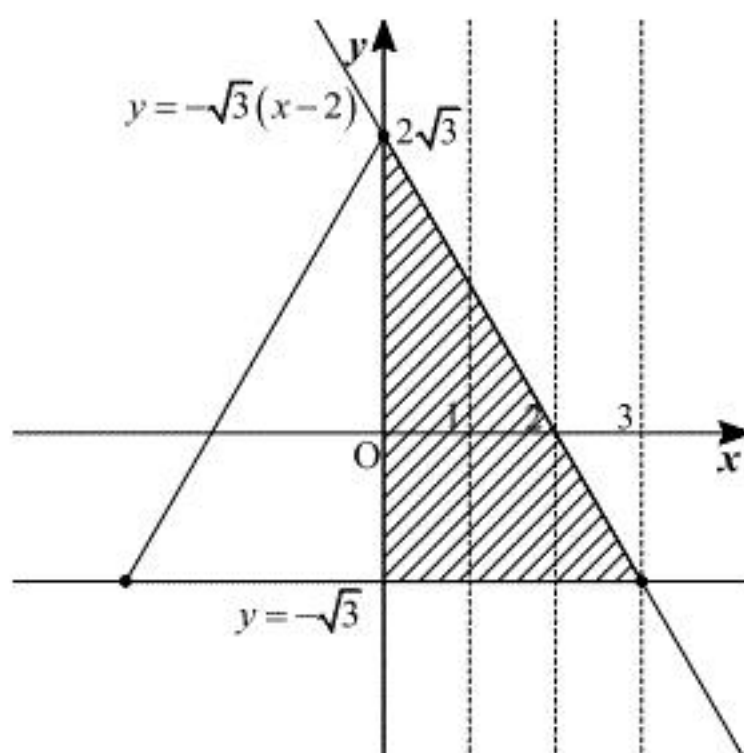
題意で与えられる回転体は、底面が半径3の円であり、高さが $3\sqrt{3}$ である円錐になるから、この体積は

$$\frac{1}{3} \cdot 3^2 \pi \cdot 3\sqrt{3} = 9\sqrt{3}\pi$$

と求まる。

(b)

座標を設定して積分することによって、体積を求める。以下のように座標を設定すると、斜線部を x 軸の周りに回転したものの体積を2倍すれば、求めるべき体積が求まることがわかるから、



この回転体の体積は、

$$\begin{aligned} & 2 \left\{ \pi \int_0^1 \left(-\sqrt{3}(x-2) \right)^2 dx + \pi \int_1^2 \left(-\sqrt{3} \right)^2 dx + \pi \int_2^3 \left\{ \left(-\sqrt{3} \right)^2 - \left(-\sqrt{3}(x-2) \right)^2 \right\} dx \right\} \\ &= 2 \left\{ 3\pi \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_0^1 + 3\pi [x]_1^2 - 3\pi \left[\frac{1}{3}(x-2)^3 \right]_2^3 \right\} \\ &= 2(7\pi + 6\pi - \pi) \\ &= 24\pi \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$g(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x + 3$ とおくと、 $f(x) = \{g(x)\}^2$ と表せるから、まず、 $0 \leq x \leq 4$ に

おける $g(x)$ のとり得る値の範囲を求める。 $g(x)$ を x について微分すると、

$$\begin{aligned} g'(x) &= x^3 - 6x^2 + 11x - 6 \\ &= (x-1)(x^2 - 5x + 6) \\ &= (x-1)(x-2)(x-3) \end{aligned}$$

となり、また、 x が各値をとるときの $g(x)$ の値は、

$$\begin{aligned} g(0) &= 3 \\ g(1) &= \frac{1}{4} - 2 + \frac{11}{2} - 6 + 3 \\ &= \frac{3}{4} \\ g(2) &= 4 - 16 + 22 - 12 + 3 \\ &= 1 \\ g(3) &= \frac{81}{4} - 54 + \frac{99}{2} - 18 + 3 \\ &= \frac{3}{4} \\ g(4) &= 64 - 128 + 88 - 24 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となるから、 $g(x)$ の増減表は以下ようになる。

x	0		1		2		3		4
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$	3	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{3}{4}$	$\nearrow$	3

したがって、 $g(x)$ のとり得る値の範囲は

$$\frac{3}{4} \leq g(x) \leq 3$$

となるから、 $f(x) = \{g(x)\}^2$ の最小値は

$$\left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}$$

であり、最大値は

$$3^2 = 9$$

であることがわかる。

(3)(a)

赤い玉3個、白い玉3個、青い玉2個を横1列に並んだ8個の箱の中に一つずつ入れるときの入れ方の総数を考えればよい。8個の箱の中から赤い玉を入れる3個の箱を選び、余りの5個の箱の中から白い玉を入れる3個の箱を選ぶような選び方の総数を求めればよいから、このような場合の数は

$$\begin{aligned} {}_8C_3 \cdot {}_5C_3 &= 56 \cdot 10 \\ &= 560 \quad [\text{通り}] \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

青い玉2つをひとまとめにして考える。すると、赤い玉3個、白い玉3個、青い玉のひとまとめ1個の計7個を横1列に並べる場合の数を求めればよいことになるから、(a)と同じように考えて、

$$\begin{aligned} {}_7C_3 \cdot {}_4C_3 &= 35 \cdot 4 \\ &= 140 \quad [\text{通り}] \end{aligned}$$

と求まる。

(c)

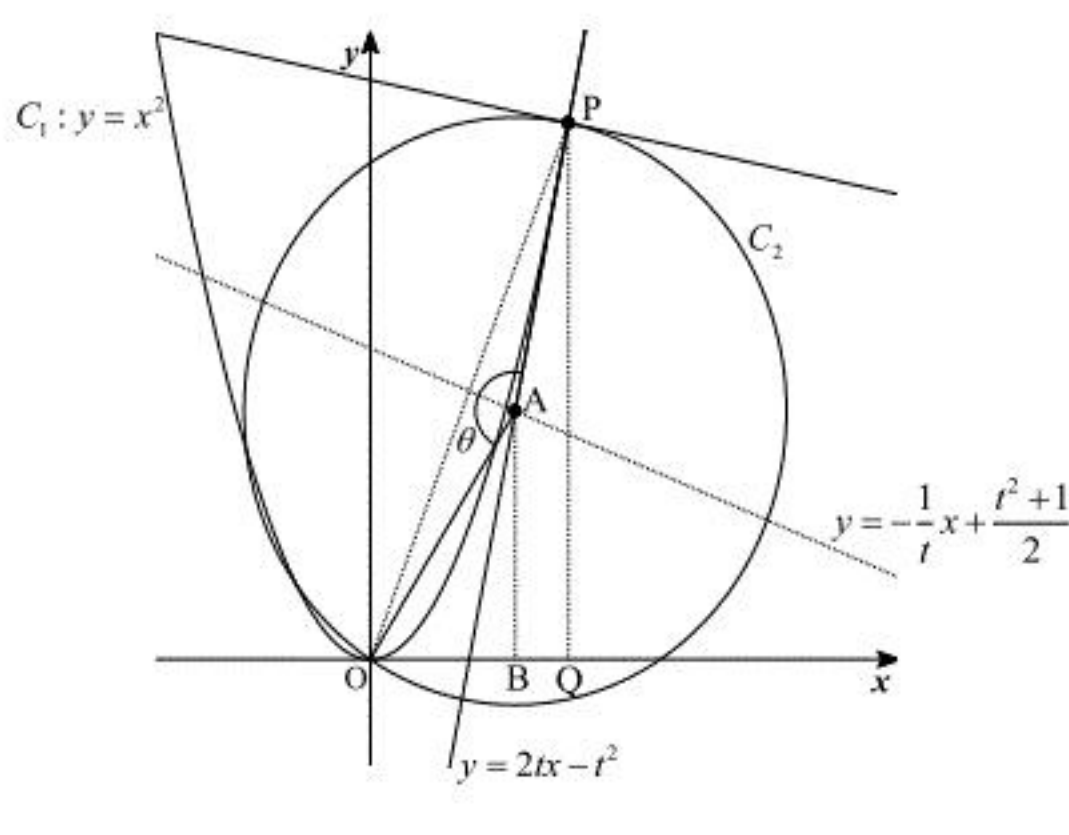
まず、赤い玉が続かないような並べ方を考える。このような場合の数は、先に白い玉3個、青い玉2個を横1列に並べ、それらの両端と玉の間の計6か所から3か所を選んで、赤い玉を入れるように考えることで、

$$\begin{aligned} {}_5C_3 \cdot {}_6C_3 &= 10 \cdot 20 \\ &= 200 \quad [\text{通り}] \end{aligned}$$

と求まるから、(a)の場合の数から引き算をすることで、求める場合の数は、

$$560 - 200 = 360 \quad [\text{通り}]$$

となる。



(1)

C_1 の点 P での接線と C_2 の点 P での接線が直交するという条件から、点 A は C_1 の点 P での接線の上にあることがわかる。一方、点 A は線分 OP の垂直二等分線上の点でもあるので、これらの交点を求めればよい。 $y = x^2$ について、 $y' = 2x$ より、 C_1 の点 P での接線の方程式は、

$$y = 2t(x - t) + t^2 = 2tx - t^2$$

となる。また、線分 OP は傾き $t > 0$ で、その中点は $\left(\frac{t}{2}, \frac{t^2}{2}\right)$ であるから、その垂直二等分線は、

$$y = -\frac{1}{t}\left(x - \frac{t}{2}\right) + \frac{t^2}{2} = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2 + 1}{2}$$

となる。両式から y を消去して、 x について解くと、

$$2tx - t^2 = -\frac{1}{t}x + \frac{t^2 + 1}{2} \Leftrightarrow \left(2t + \frac{1}{t}\right)x = \frac{3t^2 + 1}{2}$$

$$\therefore x = \frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)}$$

となる。したがって、これを接線の式に代入し、

$$y = 2t \cdot \frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)} - t^2 = \frac{t^4}{2t^2 + 1}$$

となるので、点 A の座標は $\left(\frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)}, \frac{t^4}{2t^2 + 1}\right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad A\left(\frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)}, \frac{t^4}{2t^2 + 1}\right)$$

(2)

$$r = OA$$

$$= \sqrt{\left\{\frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)}\right\}^2 + \left\{\frac{t^4}{2t^2 + 1}\right\}^2}$$

$$= \frac{t\sqrt{4t^6 + 9t^4 + 6t^2 + 1}}{2(2t^2 + 1)}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad r = \frac{t\sqrt{4t^6 + 9t^4 + 6t^2 + 1}}{2(2t^2 + 1)}$$

(3)

$$BQ = t - \frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)} = \frac{t(t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= (AB + PQ) \cdot BQ \cdot \frac{1}{2} \\ &= \left(\frac{t^4}{2t^2 + 1} + t^2\right) \cdot \frac{t(t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{t^3(3t^2 + 1)(t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cdot OB \cdot AB \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t(3t^2 + 1)}{2(2t^2 + 1)} \cdot \frac{t^4}{2t^2 + 1} \\ &= \frac{t^5(3t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^2 + 1}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t^2}\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_1}{S_2} = 1$$

(4)

$$\triangle OAP = \triangle OPQ - \triangle OAB - \text{台形 } ABQP$$

$$= \frac{1}{2} \cdot t \cdot t^2 - \frac{t^3(3t^2 + 1)(t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)^2} - \frac{t^5(3t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{t^3\{2(2t^2 + 1)^2 - (3t^2 + 1)(t^2 + 1) - t^2(3t^2 + 1)\}}{4(2t^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{t^3(t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)}$$

となる。一方で、

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

とも表せるので、これより、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{2}{r^2} \cdot \frac{t^3(t^2 + 1)}{4(2t^2 + 1)} \\ &= \frac{t(2t^2 + 1)(t^2 + 1)}{4t^6 + 9t^4 + 6t^2 + 1} \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sin \theta = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{t^2}\right)\left(1 + \frac{1}{t^2}\right)}{4t + \frac{9}{t} + \frac{6}{t^3} + \frac{1}{t^5}}$$

$$= 0$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sin \theta = 0$$

(5)

$$S_3' = (C_1 \text{ の上側にある弧 } OP \text{ と線分 } OP \text{ で囲まれた図形の面積})$$

$$S_3'' = (\text{線分 } OP \text{ と } C_1 \text{ で囲まれた図形の面積})$$

とおけば、 $S_3 = S_3' + S_3''$ である。ここで、

$$S_3' = (\text{扇形 } OAP) - \triangle OAP$$

$$= \frac{1}{2} r^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \sin \theta$$

$$= \frac{1}{2} r^2 (\theta - \sin \theta)$$

$$S_3'' = \int_0^t (tx - x^2) dx$$

$$= \int_0^t x(t - x) dx$$

$$= \frac{1}{6} t^3$$

$$S_4 = \pi r^2$$

であるから、

$$\frac{S_3}{S_4} = \frac{1}{2\pi} (\theta - \sin \theta) + \frac{4(2t^2 + 1)^2}{\pi t^2 (4t^6 + 9t^4 + 6t^2 + 1)} \cdot \frac{1}{6} t^3$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\theta - \sin \theta) + \frac{2\left(2 + \frac{1}{t^2}\right)^2}{3\pi \left(4t + \frac{9}{t} + \frac{6}{t^3} + \frac{1}{t^5}\right)}$$

となる。ここで、 $\angle OAP > \angle OQP = \frac{\pi}{2}$ であることと、(4)の結果から、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta = \pi$$

であることに注意すれば、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_3}{S_4} = \frac{1}{2\pi} (\pi - 0) + 0$$

$$= \frac{1}{2}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{S_3}{S_4} = \frac{1}{2}$$