

【解答】

(1)

ア 1	イ 6	ウ 5	エ 1	オ 2
カ 3	キ 1	ク 8	ケ 4	コ 3

(2)

サ 1	シ 3	ス 3	セ 3	ソ 4
タ 3	チ 3	ツ 9	テ 8	ト 3
ナ 3	ニ 9	ヌ 2	ネ 3	ノ 3

(3)

ハ 3	ヒ 1	フ 8	ヘ 5	ホ 1
マ 8	ミ 7	ム 3	メ 2	モ 4

【解説】

(1)(a)

9個から2個を取り出す方法は全部で ${}_9C_2$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。そのうちで最大値が7になるような取り出し方は、1から7までの7個から2個を取り出す ${}_7C_2$ 通りから、1から6までの6個から2個を取り出す ${}_6C_2$ 通りを除いて求めることができるので、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_2 - {}_6C_2}{{}_9C_2} = \frac{21-15}{36} = \frac{1}{6}$$

となる。

(b)

9個から3個を取り出す方法は全部で ${}_9C_3$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。そのうちで最大値が7以下になるような取り出し方は、1から7までの7個から3個を取り出す ${}_7C_3$ 通りであるから、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_3}{{}_9C_3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{5}{12}$$

となる。

(c)

9個から3個を取り出す方法は全部で ${}_9C_3$ 通りあり、これらは同様に確からしく起こる。そのうちで最大値が5以上7以下になるような取り出し方は、(a)と同様に考えると、1から7までの7個から3個を取り出す ${}_7C_3$ 通りから、1から4までの4個から3個を取り出す ${}_4C_3$ 通りを除いて求めることができるので、求める確率は、

$$\frac{{}_7C_3 - {}_4C_3}{{}_9C_3} = \frac{35-4}{84} = \frac{31}{84}$$

となる。

(d)

[1] $1 \leq k \leq 6$ のとき

(a)と同様に考えると、

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{{}_7C_k - {}_6C_k}{{}_9C_k} \\ &= \frac{\frac{7!}{k!(7-k)!} - \frac{6!}{k!(6-k)!}}{\frac{9!}{k!(9-k)!}} \\ &= \frac{7(9-k)(8-k) - (9-k)(8-k)(7-k)}{9 \cdot 8 \cdot 7} \\ &= \frac{k(9-k)(8-k)}{9 \cdot 8 \cdot 7} \end{aligned}$$

となるので、 $1 \leq k \leq 5$ に対して、

$$\begin{aligned} p_{k+1} - p_k &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(k+1)(9-k-1)(8-k-1)}{9 \cdot 8 \cdot 7} - \frac{k(9-k)(8-k)}{9 \cdot 8 \cdot 7} &> 0 \\ \Leftrightarrow \frac{(8-k)(7-3k)}{9 \cdot 8 \cdot 7} &> 0 \\ \therefore k &< \frac{7}{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > p_6$$

となる。また、 $p_6 = \frac{6 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{1}{14}$ である。

[2] $k=7$ のとき

最大値が7となるのは、1, 2, 3, 4, 5, 6, 7の7個を取り出すときのみであるから、

$$\frac{1}{{}_9C_7} = \frac{1}{36}$$

である。

[3] $k=8, 9$ のとき

必ず8または9を取り出すことになるから、最大値が7となる確率は0である。

以上、[1], [2], [3]より、

$$p_1 < p_2 < p_3 > p_4 > p_5 > p_6 > p_7 > p_8 = p_9$$

とわかるから、 $k=3$ のとき、 p_k が最大となる。

(2)(a)

$$a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3} S_n \quad \cdots \textcircled{1}$$

において、 n を $n+1$ に置き換えると

$$a_{n+2} = a_{n+1} + \frac{4}{3} S_{n+1} \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。したがって、 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$ に注意して②から①を引くと、

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= a_{n+1} - a_n + \frac{4}{3} a_{n+1} \\ \therefore a_{n+2} &= \frac{10}{3} a_{n+1} - a_n \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を得る。また、 $a_1 = 3$ であり、 $S_1 = a_1$ に注意すれば、①より $a_2 = a_1 + \frac{4}{3} a_1 = 7$ である。3項間漸化式③を変形すると、

$$\begin{aligned} \textcircled{3} &\Leftrightarrow a_{n+2} - 3a_{n+1} = \frac{1}{3} a_{n+1} - a_n \\ \therefore d_{n+1} &= \frac{1}{3} d_n \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow a_{n+2} - \frac{1}{3} a_{n+1} = 3a_{n+1} - a_n$$

$$\therefore e_{n+1} = 3e_n \quad \cdots \textcircled{5}$$

という2つの漸化式が得られ、さらにそれぞれの初項は、

$$d_1 = a_2 - 3a_1 = -2$$

$$e_1 = a_2 - \frac{1}{3} a_1 = 6$$

であるから、

$$d_n = a_{n+1} - 3a_n = -\frac{2}{3^{n-1}} \quad \cdots \textcircled{6}$$

$$e_n = a_{n+1} - \frac{1}{3} a_n = 6 \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^n \quad \cdots \textcircled{7}$$

と求まる。したがって、⑦-⑥より

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} a_n &= 2 \cdot 3^n + \frac{2}{3^{n-1}} \\ \therefore a_n &= \frac{3}{4} \left(3^n + \frac{1}{3^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

を得る。

(b)

(a)と①より、

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{3}{4} (a_{n+1} - a_n) \\ &= \frac{3^2}{4^2} \left(2 \cdot 3^n - \frac{2}{3^n} \right) \\ &= \frac{9}{8} \left(3^n - \frac{1}{3^n} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(c)

数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ を並び替えたものだから、 $\sum_{k=1}^m a_k = \sum_{k=1}^m b_k$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^m \left(\sqrt{a_k} + \sqrt{b_k} \right)^2 &= \sum_{k=1}^m a_k + 2 \sum_{k=1}^m \sqrt{a_k b_k} + \sum_{k=1}^m b_k \\ &= 2 \left(\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m \sqrt{a_k b_k} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで、(a)の式から $a_n > 0$ であり、数列 $\{b_n\}$ は数列 $\{a_n\}$ を並び替えたものであるから、

$b_n > 0$ である。したがって、 $\sum_{k=1}^m \sqrt{a_k b_k}$ について、相加相乗平均より、

$$\sum_{k=1}^m \sqrt{a_k b_k} \leq \sum_{k=1}^m \frac{a_k + b_k}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=1}^m b_k \right) = \sum_{k=1}^m a_k$$

であって、等号は、すべての $1 \leq k \leq m$ に対して、 $a_k = b_k$ であるときに成り立つ。したがって、求める和の最大値は、

$$\sum_{k=1}^m \left(\sqrt{a_k} + \sqrt{a_k} \right)^2 = 4S_m = \frac{9}{2} \left(3^m - \frac{1}{3^m} \right)$$

となる。

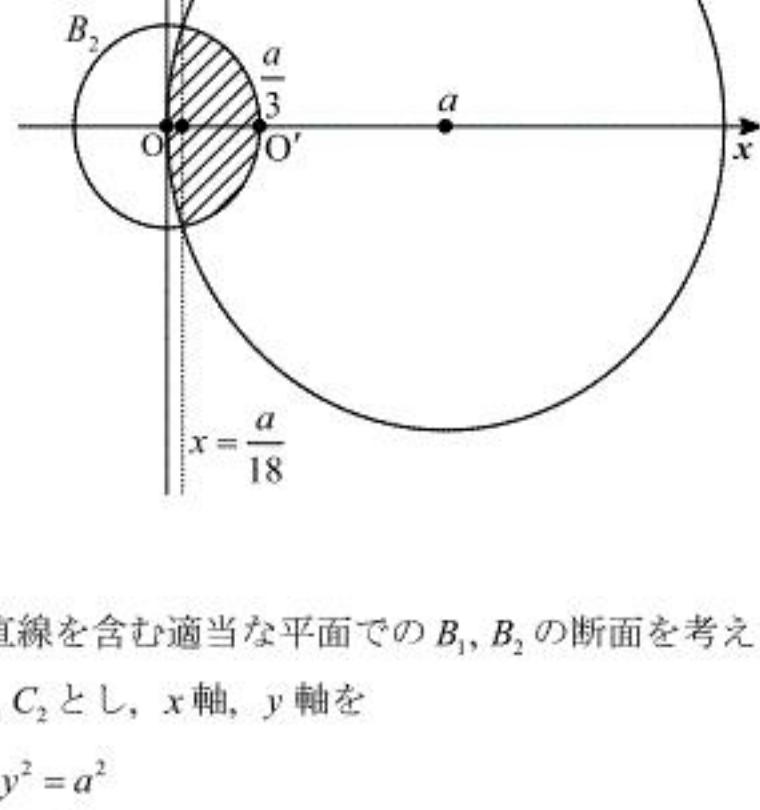
(3)(a)

円の方程式は $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ であるから、求める体積 $V_r(t)$ は

$$\begin{aligned} V_r(t) &= \pi \int_0^t y^2 dx \\ &= \pi \int_0^t \left\{ r^2 - (x-r)^2 \right\} dx \\ &= \pi \int_0^t (2rx - x^2) dx \\ &= \pi \left[rx^2 - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^t \\ &= \pi t^2 \left(r - \frac{t}{3} \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(b)



B_1, B_2 の中心を通る直線を含む適当な平面での B_1, B_2 の断面を考える。 B_1, B_2 の断面として現れる円をそれぞれ C_1, C_2 とし、 x 軸、 y 軸を

$$C_1 : (x-a)^2 + y^2 = a^2$$

$$C_2 : x^2 + y^2 = \left(\frac{a}{3} \right)^2$$

となるようにとってきて一般性を失わない。このとき、 C_1, C_2 の交点の x 座標は、2式を連立して、 y を消去することにより、

$$\begin{aligned} a^2 - (x-a)^2 &= \left(\frac{a}{3} \right)^2 - x^2 \\ \therefore x &= \frac{a}{18} \end{aligned}$$

となることがわかる。求める体積 V は、

[1] 斜線部の $0 \leq x \leq \frac{a}{18}$ の部分の x 軸周りの回転体の体積

[2] 斜線部の $\frac{a}{18} \leq x \leq \frac{a}{3}$ の部分の x 軸周りの回転体の体積

の和である。[1]は(a)において、 $r=a, t=\frac{a}{18}$ としたものであり、[2]はO'を原点とみて、 x 軸の

負の方向を正の向きにみることにより、(a)において、 $r=\frac{a}{3}, t=\frac{a}{3}-\frac{a}{18}=\frac{5}{18}a$ としたものであることがわかるので、

$$\begin{aligned} V &= V_a \left(\frac{a}{18} \right) + V_{\frac{a}{3}} \left(\frac{5}{18} a \right) \\ &= \pi \cdot \frac{a^2}{18^2} \cdot \frac{53}{54} a + \pi \cdot \frac{5^2}{18^2} a^2 \cdot \frac{13}{54} a \\ &= \frac{7}{324} \pi a^3 \end{aligned}$$

となることがわかる。

(1)

$f(x)=g(x)$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+x} &= \frac{1}{a-x} \\ \Leftrightarrow a-x &= a+x \\ \therefore x &= 0\end{aligned}$$

となる。

(答) $x=0$

(2)

[1] $x < -a$ のとき

$f(x)=\frac{1}{a+x} < 0, g(x)=\frac{1}{a-x} > 0$ であるから, 常に $f(x) < g(x)$ である。

[2] $-a < x < a$ のとき

$f(x)=\frac{1}{a+x} > 0, g(x)=\frac{1}{a-x} > 0$ であるから,

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+x} &\leq \frac{1}{a-x} \\ \Rightarrow a-x &\leq a+x \quad (-a < x < a) \\ \therefore 0 &\leq x < a\end{aligned}$$

である。

[3] $a < x$ のとき

$f(x)=\frac{1}{a+x} > 0, g(x)=\frac{1}{a-x} < 0$ であるから, 常に $f(x) > g(x)$ である。

以上[1], [2], [3]より, 求める x の範囲は,

$$x < -a, 0 \leq x < a$$

である。

(答) $x < -a, 0 \leq x < a$

(3)

$x > 0$ において, $h_1(x) = f(x) - \log(x+4) + \log(x+3)$ とおく。このとき, $h_1(x) > 0$ が成立する a の範囲を求める。 $h_1(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}h_1'(x) &= -\frac{1}{(x+a)^2} - \frac{1}{x+4} + \frac{1}{x+3} \\ &= \frac{(2a-7)x + a^2 - 12}{(x+a)^2(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

となる。 $1 \leq a \leq 3$ のとき, $2a-7 < 0$ かつ $a^2-12 < 0$ より $h_1'(x) < 0$ ($x > 0$) であるから, $h_1(x)$

は $x > 0$ で単調に減少する。 $x \rightarrow \infty$ とした場合の極限を考えると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_1(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{a+x} - \log \frac{x+4}{x+3} \right) = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

であるから, $1 \leq a \leq 3$ において $h_1(x) > 0$ ($x > 0$) は成立する。一方 $4 \leq a$ のとき, $2a-7 > 0$ かつ

$a^2-12 > 0$ より $h_1'(x) > 0$ ($x > 0$) であるから, $h_1(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する。しかし,

$x \rightarrow \infty$ とした場合の極限は①式と同様に 0 であるから, $4 \leq a$ において $h_1(x) > 0$ ($x > 0$) は成立しない。以上より, $1 \leq a \leq 3$ のとき, $h_1(x) > 0$ となる。

同様にして, $x > 0$ において, $h_2(x) = \log(x+4) - \log(x+3) - f(x+1)$ とおく。このとき, $h_2(x) > 0$ が成立する a の範囲を求める。 $h_2(x)$ を x で微分すると,

$$\begin{aligned}h_2'(x) &= \frac{1}{x+4} - \frac{1}{x+3} + \frac{1}{(x+a+1)^2} \\ &= \frac{(5-2a)x + 12 - (a+1)^2}{(x+a+1)^2(x+3)(x+4)}\end{aligned}$$

となる。 $3 \leq a$ のとき, $5-2a < 0$ かつ $12-(a+1)^2 < 0$ より $h_2'(x) < 0$ ($x > 0$) であるから, $h_2(x)$

は $x > 0$ で単調に減少する。 $x \rightarrow \infty$ とした場合の極限を考えると,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h_2(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\log \frac{x+4}{x+3} - \frac{1}{a+x+1} \right) = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

であるから, $3 \leq a$ において $h_2(x) > 0$ ($x > 0$) は成立する。一方 $1 \leq x \leq 2$ のとき, $5-2a > 0$ かつ

$12-(a+1)^2 > 0$ より $h_2'(x) > 0$ ($x > 0$) であるから, $h_2(x)$ は $x > 0$ で単調に増加する。しかし,

$x \rightarrow \infty$ とした場合の極限は②式と同様に 0 であるから, $1 \leq x \leq 2$ において $h_2(x) > 0$ ($x > 0$) は成立しない。以上より, $3 \leq a$ のとき, $h_2(x) > 0$ となる。

したがって, すべての正の実数 x に対して $h_1(x) > 0$ かつ $h_2(x) > 0$ となるような自然数 a の値は 3 である。

(答) 3

(4)

(3)の結果より, $x > 0$ にて成り立つ式

$$\frac{1}{x+4} < \log(x+4) - \log(x+3) < \frac{1}{x+3}$$

を得る。これを変形すると,

$$\begin{aligned}-\frac{1}{x+3} &< \log \left(1 - \frac{1}{x+4} \right) < -\frac{1}{x+4} \\ \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{x+3}} &< 1 - \frac{1}{x+4} < e^{-\frac{1}{x+4}}\end{aligned}$$

を得る。 $1 - \frac{1}{x+4} < e^{-\frac{1}{x+4}}$ に $x=96$ を代入すると,

$$\begin{aligned}1 - \frac{1}{96+4} &< e^{-\frac{1}{96+4}} \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-\frac{1}{100}} &< \frac{1}{100}\end{aligned}$$

となり, $e^{-\frac{1}{x+3}} < 1 - \frac{1}{x+4}$ に $x=96$ を代入すると,

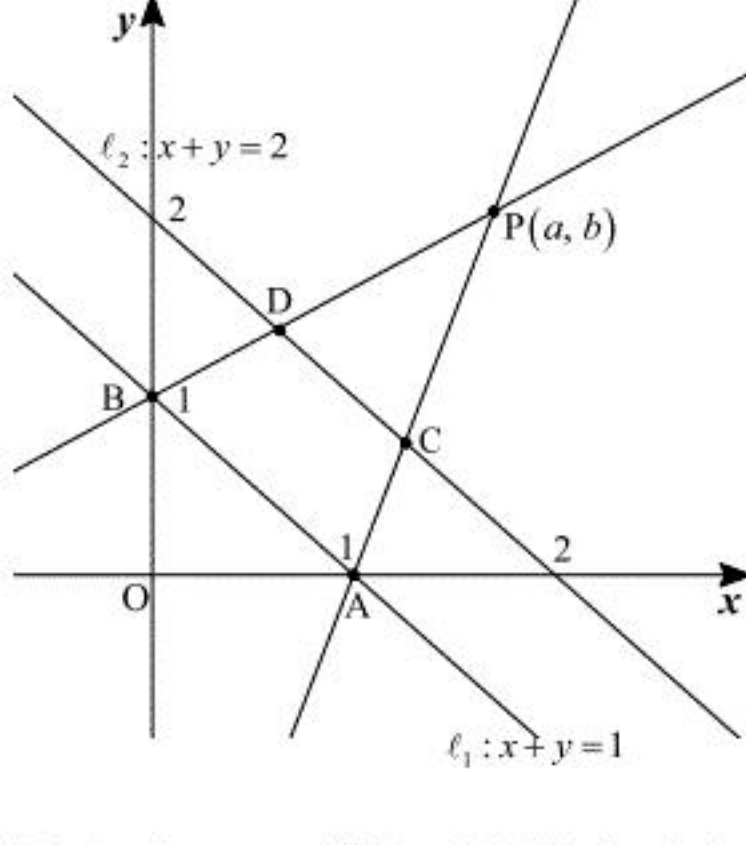
$$\begin{aligned}e^{-\frac{1}{96+3}} &< 1 - \frac{1}{96+4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{100} &< 1 - e^{-\frac{1}{99}}\end{aligned}$$

となるから, $\frac{1}{100} < 1 - e^{-\frac{1}{n}}$ をみたす最大の n は 99 である。

3

(1)

与えられた点，直線を図示すると，以下の図のようになる。



まず，直線 AP の式を求める。点 A, P の座標は，それぞれ $(1, 0)$, (a, b) であるから，

$$\overrightarrow{AP} = (a-1, b)$$

となる。よって，直線 AP の法線ベクトル $\vec{n}$ の 1 つは

$$\vec{n} = (b, -(a-1))$$

となるから，直線 AP の式は，

$$b(x-1) - (a-1)y = 0$$

である。点 C は直線 AP と直線 $\ell_2: x+y=2$ の交点であるから，点 C の座標は，連立方程式を行列を用いて解くことにより，

$$\begin{aligned} & \begin{cases} b(x-1) - (a-1)y = 0 \\ x+y=2 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & -(a-1) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix} \\ & \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{a+b-1} \begin{pmatrix} 1 & a-1 \\ -1 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ 2 \end{pmatrix} \quad (\because \text{点 P は直線 } \ell_1 \text{ 上にないから, } a+b-1 \neq 0) \\ & \therefore (x, y) = \left(2 - \frac{b}{a+b-1}, \frac{b}{a+b-1} \right) \end{aligned}$$

と求まる。また，同様に考えることにより，直線 BP の式は，

$$(b-1)x - a(y-1) = 0$$

となり，直線 BP と直線 $\ell_2: x+y=2$ の交点 D の座標は，

$$(x, y) = \left(\frac{a}{a+b-1}, 2 - \frac{a}{a+b-1} \right)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \text{ 点 C } \left(2 - \frac{b}{a+b-1}, \frac{b}{a+b-1} \right), \text{ 点 D } \left(\frac{a}{a+b-1}, 2 - \frac{a}{a+b-1} \right)$$

(2)

$a+b=t$ とおくと，線分 CD の長さは，

$$\begin{aligned} CD &= \sqrt{\left\{ \frac{a}{a+b-1} - \left(2 - \frac{b}{a+b-1} \right) \right\}^2 + \left\{ \left(2 - \frac{a}{a+b-1} \right) - \frac{b}{a+b-1} \right\}^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{t}{t-1} - 2 \right)^2 + \left(2 - \frac{t}{t-1} \right)^2} \\ &= \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \end{aligned}$$

と表せる。これは， $t=2$ ，つまり点 P が ℓ_2 上にあり，点 C, D が一致するときも，

$$\sqrt{2} \left| \frac{2-2}{2-1} \right| = 0$$

となり，成立している。

$$(\text{答}) \text{ CD } = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$$

(3)

点 P が点 $(2, 2)$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円周上を動くとき，つまり，実数 a, b が

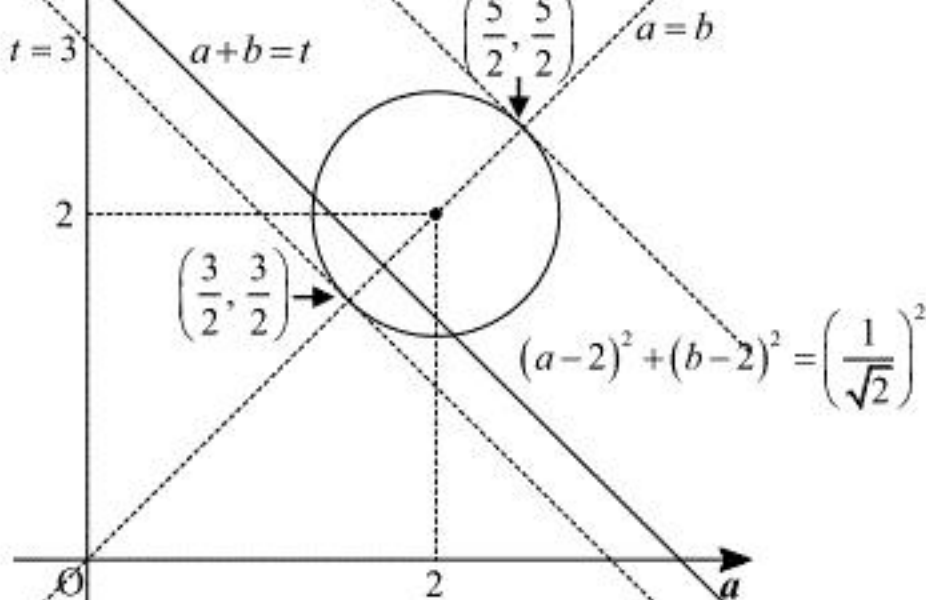
$$(a-2)^2 + (b-2)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たしながら動くときの， $CD = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$ ($t = a+b$) のとり得る値の範囲を求めればよい。

そのためには，まず，実数 a, b が $\textcircled{1}$ を満たしながら動くときの， $t = a+b$ がとり得る値の範囲 W を求める。ここで，

$$\begin{aligned} t \in W &\Leftrightarrow \textcircled{1} \text{ かつ } t = a+b \text{ を満たす実数 } a, b \text{ が存在} \\ &\Leftrightarrow ab \text{ 平面上において円 } \textcircled{1} \text{ と直線 } t = a+b \text{ が共有点をもつ} \end{aligned}$$

であり， t は直線 $t = a+b$ の b 切片を表すことに注意すると，以下の図より，



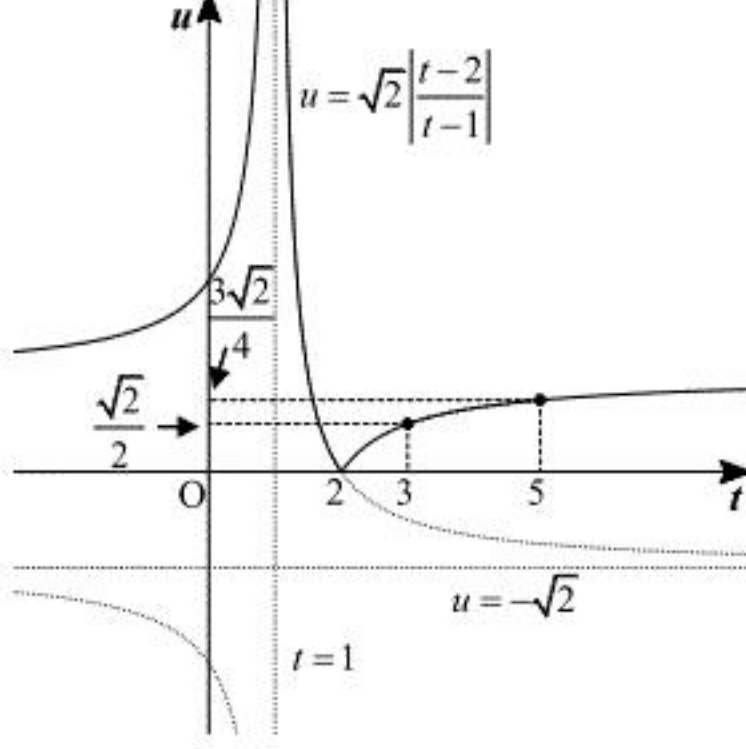
t のとり得る値の範囲は， $3 \leq t \leq 5$ であることがわかる。

また， $u = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$ とおくと，

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \\ &= \sqrt{2} \left| \frac{1}{t-1} - 1 \right| \end{aligned}$$

と変形でき， tu 平面上において，このグラフは， $u = \sqrt{2} \left(\frac{1}{t-1} - 1 \right)$ のグラフの $u < 0$ の部分を t

軸に関して折り返したものであることに注意すると，以下の図のようになる。



したがって， $3 \leq t \leq 5$ のとき， $u = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$ のとり得る値の範囲は，

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

である。

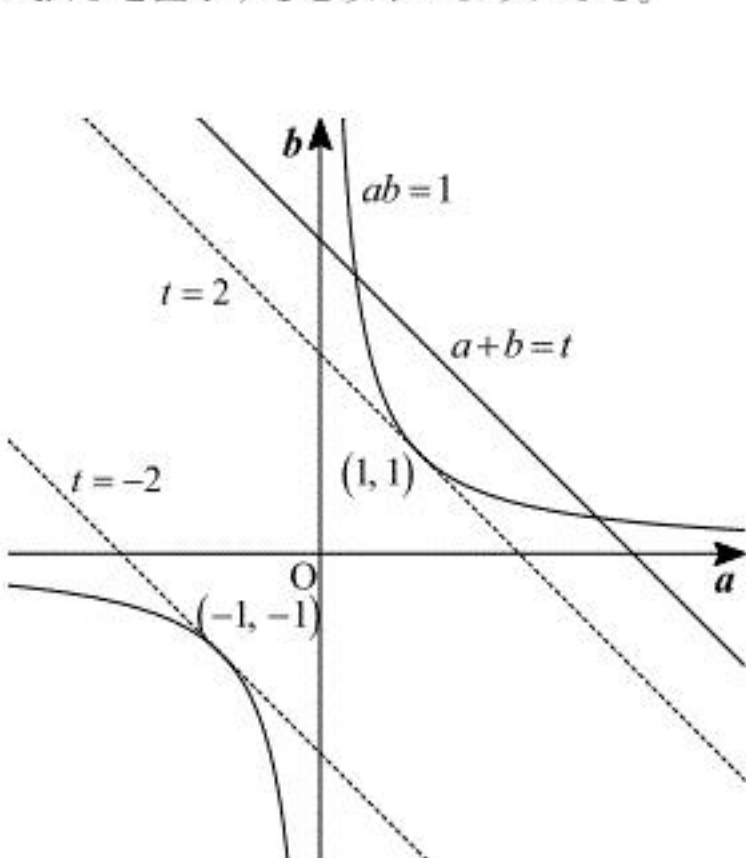
$$(\text{答}) \frac{\sqrt{2}}{2} \leq \text{CD} \leq \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

(4)

(3) と同じようにして，線分 CD の長さのとり得る値の範囲を求める。まず， ab 平面上に

$$ab=1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

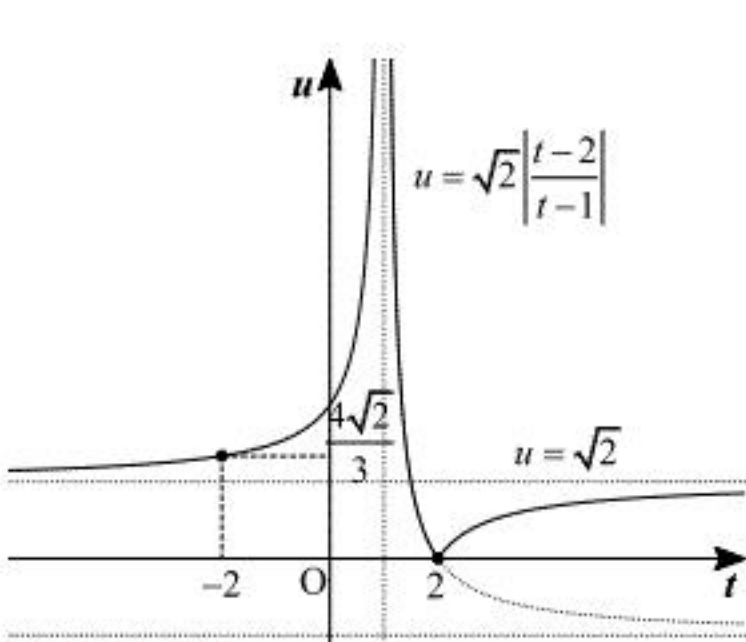
が表す双曲線と直線 $t = a+b$ を図示すると以下のようになる。



したがって，上図より， t のとり得る値の範囲は，

$$t \leq -2, \quad 2 \leq t$$

であることがわかる。また， $u = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$ のグラフを tu 平面上に図示すると，



となるから， $t \leq -2, \quad 2 \leq t$ のとき， $u = \sqrt{2} \left| \frac{t-2}{t-1} \right|$ のとり得る値の範囲は，

$$0 \leq u < \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} < u \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad 0 \leq \text{CD} < \sqrt{2}, \quad \sqrt{2} < \text{CD} \leq \frac{4\sqrt{2}}{3}$$