

(1)(a)

2 次の正方行列 $X = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ に対して、ケーリー・ハミルトンの定理を用いると、

$$X^2 - (e+h)X + (eh - fg)E = O \quad (\text{ただし、} E \text{ は 2 次の単位行列})$$

となるから、 $X^2 = A$ のとき、

$$(e+h)X - A = (eh - fg)E$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad (e+h)X - A = (eh - fg)E$$

(b)

対偶を示す。

$$\text{「} b \neq 0 \text{ または } c \neq 0 \text{ ならば } e+h \neq 0 \text{」} \quad \dots \textcircled{1}$$

の対偶をとると、

$$\text{「} e+h=0 \text{ ならば } b=0 \text{ かつ } c=0 \text{」} \quad \dots \textcircled{2}$$

となるが、 $e+h=0$ のとき、(a)の結果より、

$$A = -(eh - fg)E \quad \dots \textcircled{3}$$

となり、③の各行列の(1, 2)成分と(2, 1)成分を比較すれば、

$$b=0 \quad \text{かつ} \quad c=0$$

となるから、②は成立する。したがって、その対偶である①も成立する。

(証明終)

(c)

$b \neq 0$ または $c \neq 0$ のとき、(b)より、 $e+h \neq 0$ である。したがって、(a)より、

$$X = \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。ここで、 $X = \alpha A + \beta E$ と表されているとき、④より、

$$\begin{aligned} \alpha A + \beta E &= \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \\ \Leftrightarrow \left(\alpha - \frac{1}{e+h} \right) A &= \left(\frac{eh - fg}{e+h} - \beta \right) E \quad \dots \textcircled{5} \end{aligned}$$

となるが、 $\alpha - \frac{1}{e+h} \neq 0$ と仮定すると、 $b \neq 0$ または $c \neq 0$ より、⑤の左辺の行列の(1, 2)成分

または(2, 1)成分は0でなくなってしまう。一方、⑤の右辺の行列の(1, 2)成分と(2, 1)成分は

必ず0であるから、これは矛盾である。したがって、

$$\alpha = \frac{1}{e+h}$$

であり、このとき、⑤より、

$$\beta = \frac{eh - fg}{e+h}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{1}{e+h}, \beta = \frac{eh - fg}{e+h}$$

(2)(a)

与えられた2 次の正方行列 A は、

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 + 3 & 2(t-1) \\ 2(t+1) & t^2 - 1 \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{6}$$

であるから、

$$\begin{aligned} ad - bc &= (t^2 + 3)(t^2 - 1) - \{2(t-1) \cdot 2(t+1)\} \\ &= t^4 - 2t^2 + 1 \\ &= (t+1)^2 (t-1)^2 \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad ad - bc = (t+1)^2 (t-1)^2$$

(b)

A が⑥のように与えられているとき、任意の実数 t に対して、 $b \neq 0$ または $c \neq 0$ が成立しているから、(1)(b)(c)より、

$$X^2 = A \Rightarrow e+h \neq 0 \quad \text{かつ} \quad X = \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \quad \dots \textcircled{7}$$

が成立している。また、ケーリー・ハミルトンの定理の式に代入することにより、

$$X = \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \Rightarrow X^2 = A \quad \dots \textcircled{8}$$

が成り立つこともわかるから、結局、

$$\text{「} X^2 = A \text{ を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列 } X \text{ がちょうど 2 つ存在する」}$$

ことと、

$$\begin{aligned} \text{「} X = \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \text{ を満たす実数を成分とする 2 次の正方行列 } X \text{ がちょうど} \\ \text{2 つ存在する」} \quad \dots \textcircled{9} \end{aligned}$$

ことは同値である。したがって、⑨を満たす t の値をすべて求めればよい。以下 $\det A$ の値によって、場合分けして考える。

[1] $\det A \neq 0$ かつ $t \neq 0$ のとき

このとき、(2)(a)の結果より、 $\det A > 0$ である。ここで、

$$X^2 = A$$

が成立するためには、

$$\begin{aligned} (\det X)^2 &= \det A \\ \Leftrightarrow \det X &= \pm \sqrt{\det A} \quad (\because \det A > 0) \end{aligned}$$

が必要であるから、④について、特に

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{e+h} A + \frac{eh - fg}{e+h} E \\ \Leftrightarrow (e+h)X &= A \pm \sqrt{\det A} E \quad \text{かつ} \quad e+h \neq 0 \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (e+h)e & (e+h)f \\ (e+h)g & (e+h)h \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a \pm \sqrt{\det A} & b \\ c & d \pm \sqrt{\det A} \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}) \quad \dots \textcircled{10} \\ \text{かつ} \quad e+h &= 0 \end{aligned}$$

を満たすものを考えればよい。以降、⑩を満たすような (e, f, g, h) の組が4 つ存在することを示す。⑩の両辺の(1, 1)成分と(2, 2)成分の和を考えると、

$$(e+h)^2 = a + d \pm 2\sqrt{\det A} \quad \dots \textcircled{11}$$

となる。ここで、与えられた A の成分に注意すると、

$$\begin{aligned} a + d \pm 2\sqrt{\det A} &= (t^2 + 3) + (t^2 - 1) \pm 2\sqrt{(t+1)^2 (t-1)^2} \\ &= 2\{t^2 + 1 \pm |t^2 - 1|\} \\ &> 0 \quad (\because t \neq 0) \end{aligned}$$

となるから、

$$(e+h)^2 = a + d + 2\sqrt{\det A} \text{ のとき、} \quad e+h = \pm \sqrt{a + d + 2\sqrt{\det A}}$$

$$(e+h)^2 = a + d + 2\sqrt{\det A} \text{ のとき、} \quad e+h = \pm \sqrt{a + d - 2\sqrt{\det A}}$$

となる。したがって、

$$\begin{aligned} X &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm \sqrt{a + d + 2\sqrt{\det A}}} \begin{pmatrix} a + \sqrt{\det A} & b \\ c & d + \sqrt{\det A} \end{pmatrix} \text{ の 2 つ} \\ X &= \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \frac{1}{\pm \sqrt{a + d - 2\sqrt{\det A}}} \begin{pmatrix} a - \sqrt{\det A} & b \\ c & d - \sqrt{\det A} \end{pmatrix} \text{ の 2 つ} \end{aligned}$$

の計4 つはすべて異なり、⑩を満たすことがわかるから、[1]を満たすような t は不適であることがわかる。

[2] $t = 0$ のとき

[1]の⑩までは同じ議論ができるが、 $t = 0$ の場合、⑪は

$$\begin{aligned} (e+h)^2 &= a + d \pm 2\sqrt{\det A} \\ &= 0, 4 \end{aligned}$$

となってしまう。一方、⑩を満たすためには $e+h \neq 0$ でなければならないから、

$$e+h = \pm 2$$

が必要だが、 $e+h = 2$ のとき、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{\sqrt{a + d + 2\sqrt{\det A}}} \begin{pmatrix} a + \sqrt{\det A} & b \\ c & d + \sqrt{\det A} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が、解であり、 $e+h = -2$ のとき、

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{-\sqrt{a + d + 2\sqrt{\det A}}} \begin{pmatrix} a + \sqrt{\det A} & b \\ c & d + \sqrt{\det A}$$

(1)

$$\begin{aligned}
 \int (x-t) \sin t dt &= \int (x-t)(-\cos t)' dt \\
 &= -(x-t) \cos t + \int (-1) \cos t dt \\
 &= -(x-t) \cos t - \sin t + C
 \end{aligned}$$

となる。ここに C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int (x-t) \sin t dt = -(x-t) \cos t - \sin t + C$$

(C は積分定数)

(2)

(i) $x < 0$ のとき

$0 \leq t \leq \pi$ において、 $x-t < 0$ より、 $h(x-t)=0$ であるから、

$$f(x) = \int_0^\pi h(x-t) \sin t dt = 0$$

となる。

(ii) $0 \leq x \leq \pi$ のとき

$0 \leq t \leq \pi$ において、

$$h(x-t) = \begin{cases} x-t & (0 \leq t \leq x \text{ のとき}) \\ 0 & (x < t \leq \pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_0^\pi h(x-t) \sin t dt \\
 &= \int_0^x (x-t) \sin t dt + 0 \\
 &= \left[-(x-t) \cos t - \sin t \right]_0^x \\
 &= x - \sin x
 \end{aligned}$$

となる。

(iii) $\pi < x < 2\pi$ のとき

$x-\pi \leq t \leq \pi$ において、 $0 < t \leq \pi$ より、 $h(x-t)=x-t$ であるから、

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \int_{x-\pi}^\pi h(x-t) \sin t dt \\
 &= \int_{x-\pi}^\pi (x-t) \sin t dt \\
 &= \left[-(x-t) \cos t - \sin t \right]_{x-\pi}^\pi \\
 &= x - \pi - \pi \cos x - \sin x
 \end{aligned}$$

となる。

(iv) $2\pi \leq x$ のとき

$0 \leq t \leq \pi$ において、 $(x, t) = (2\pi, \pi)$ のときを除いては、 $x-t > \pi$ なので、

$$h(x-t) = \begin{cases} \pi & (x=2\pi, t=\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

となるが、積分区間の端点 $t=\pi$ の関数値だけでは積分値は変わらないので、

$$f(x) = \int_0^\pi h(x-t) \sin t dt = 0$$

となる。

以上、(i)から(iv)より、

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ x - \sin x & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \\ x - \pi - \pi \cos x - \sin x & (\pi < x < 2\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (2\pi \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ x - \sin x & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \\ x - \pi - \pi \cos x - \sin x & (\pi < x < 2\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (2\pi \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} f'(x) dx &= \left[f(x) \right]_0^{2\pi} \\
 &= f(2\pi) - f(0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{2\pi} f'(x) dx = 0$$

(4)

(2)の結果と、 $f(x)$ は微分可能であるということから、

$$f'(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0 \text{ のとき}) \\ 1 - \cos x & (0 \leq x \leq \pi \text{ のとき}) \\ 1 + \pi \sin x - \cos x & (\pi < x < 2\pi \text{ のとき}) \\ 0 & (2\pi \leq x \text{ のとき}) \end{cases}$$

である。 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta = \pi$ に注意すると、 $\pi < x < 2\pi$ において、

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 1 + \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \cdot \sin x - \cos x &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos x \cos \theta - \sin x \sin \theta &= \cos \theta \\
 \Leftrightarrow \cos(x + \theta) &= \cos \theta \\
 \Leftrightarrow x + \theta &= \theta + 2\pi n, -\theta + 2\pi n \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\
 \therefore x &= 2\pi n, 2\pi n - 2\theta \quad (n=0, \pm 1, \pm 2, \dots)
 \end{aligned}$$

と求めることができる。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ 、 $\pi < x < 2\pi$ であるから、 $x = 2\pi - 2\theta$ のみが条件を

満たすことがわかる。

$$(\text{答}) \quad x = 2\pi - 2\theta$$

(5)

(4)で求めた $f'(x)$ の式より、 $0 \leq x \leq \pi$ において、 $f'(x) \geq 0$ であるから、(4)の結果と合わせて、

$0 \leq x \leq 2\pi$ において、

$$|f'(x)| = \begin{cases} f'(x) & (0 \leq x \leq 2\pi - 2\theta \text{ のとき}) \\ -f'(x) & (2\pi - 2\theta < x \leq 2\pi \text{ のとき}) \end{cases}$$

であることがわかる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx &= \int_0^{2\pi-2\theta} f'(x) dx + \int_{2\pi-2\theta}^{2\pi} -f'(x) dx \\
 &= \left[f(x) \right]_0^{2\pi-2\theta} + \left[-f(x) \right]_{2\pi-2\theta}^{2\pi} \\
 &= 2f(2\pi-2\theta) - f(0) - f(2\pi) \\
 &= 2\{(2\pi-2\theta) - \pi - \pi \cos(2\pi-2\theta) - \sin(2\pi-2\theta)\} \\
 &= 2(\pi-2\theta - \pi \cos 2\theta + \sin 2\theta) \\
 &= 2\{\pi-2\theta - \pi(2\cos^2 \theta - 1) + 2\sin \theta \cos \theta\}
 \end{aligned}$$

と計算できる。ここで、 $\tan \theta = \pi$ 、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、

$$\sin \theta = \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 1}}, \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}}$$

であることを用いると、

$$\begin{aligned}
 \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx &= 2 \left\{ \pi - 2\theta - \pi \left(2 \cdot \frac{1}{\pi^2 + 1} - 1 \right) + 2 \cdot \frac{\pi}{\sqrt{\pi^2 + 1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi^2 + 1}} \right\} \\
 &= 4(\pi - \theta)
 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{2\pi} |f'(x)| dx = 4(\pi - \theta)$$