

【解答】

- (1) ア 9 イ 5 ウ 1 エ 2 オ 5
 カ 2 キ 0 ク 2 ケ 1 コ 5
 サ 2 シ 8 ス 5 セ 1 ソ 0
 タ 0
- (2) ア 1 イ 1 ウ 6 エ 1 オ 1
 カ 1 キ 2 ク 2 ケ 3 コ 5
 サ 6 シ 4 ス 3 セ 1 ソ 6
- (3) (a) ア 2 イ 8
 (b) ウ 1 エ 2 オ 4
 (c) カ 9 キ 7 ク 2

【解説】

(1)

点P(x, y)が等式

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 \quad \cdots \textcircled{1}$$

を満たしながら動くとき、

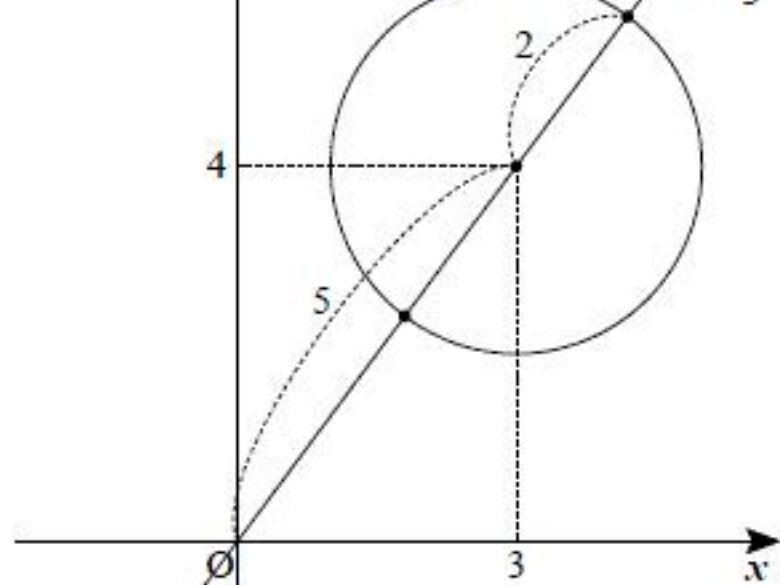
$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 &= \{(x-(-1))^2 + y^2\} + \{(x-1)^2 + y^2\} \\ &= 2\left\{\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + 1\right\} \end{aligned} \quad \cdots \textcircled{2}$$

の最小値と最大値を求めればよい。そのためには、①を満たす条件のもとで

$$\sqrt{x^2 + y^2}$$

の最小値と最大値を求めればよく、これをxy平面上で考えると、①が表す円上の点で原点からの距離が最小のものと最大のものを求めればよいということになる。

ここで①が表す円と、原点と円の中心を通る直線を図示すると以下ようになる。



また、上図において円と直線が交わる点は、2式を連立することで

$$\begin{cases} (x-3)^2 + (y-4)^2 = 2^2 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-3)^2 + \left(\frac{4}{3}x-4\right)^2 = 2^2 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5x-9)(5x-21) = 0 \\ y = \frac{4}{3}x \end{cases}$$

$$\therefore (x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right), \left(\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\right)$$

と求めるから、②より、 $AP^2 + BP^2$ は

$$(x, y) = \left(\frac{9}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

のとき、最小値

$$2\{(5-2)^2 + 1\} = 20$$

をとり、

$$(x, y) = \left(\frac{21}{5}, \frac{28}{5}\right)$$

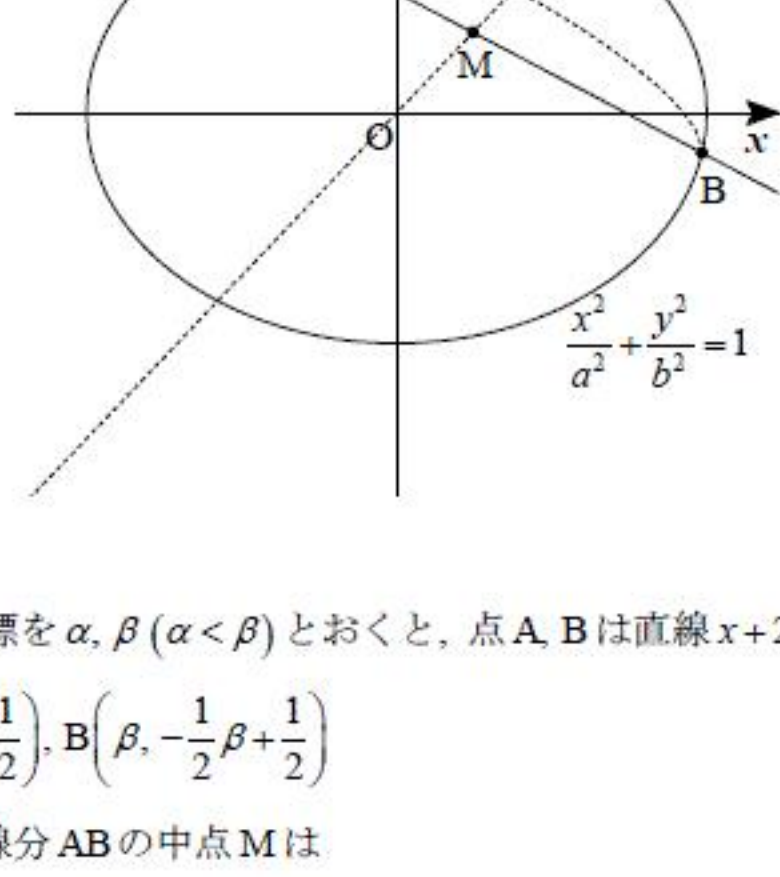
のとき、最大値

$$2\{(5+2)^2 + 1\} = 100$$

をとることがわかる。

(2)

題意で与えられた直線、楕円、点を図示すると以下ようになる。

まず、点A, Bのx座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、点A, Bは直線 $x+2y=1$ 上にあるから、

$$A\left(\alpha, -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right), B\left(\beta, -\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{2}\right)$$

と表せる。ここで、線分ABの中点Mは

$$M\left(\frac{1}{2}(\alpha + \beta), -\frac{1}{4}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}\right)$$

と表せるから、直線OMの傾きが1であるという条件から、

$$\frac{1}{2}(\alpha + \beta) = -\frac{1}{4}(\alpha + \beta) + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha + \beta = \frac{2}{3} \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。また、 $AB = \sqrt{5}$ という条件から、

$$\sqrt{(\beta - \alpha)^2 + \left(-\frac{1}{2}\beta - \left(-\frac{1}{2}\alpha\right)\right)^2} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$$

$$\therefore \beta - \alpha = 2 \quad (>0) \quad \cdots \textcircled{4}$$

となるから、③、④より、

$$\alpha = -\frac{2}{3}, \beta = \frac{4}{3}$$

となる。したがって、点A, Bの座標は、

$$A\left(-\frac{2}{3}, \frac{5}{6}\right), B\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{6}\right)$$

と求める。さらに、点A, Bは楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点であるから、

$$\begin{cases} \left(-\frac{2}{3}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \frac{1}{b^2} = 1 \\ \left(\frac{4}{3}\right)^2 \frac{1}{a^2} + \left(-\frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{b^2} = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a^2} = \frac{6}{11} \\ \frac{1}{b^2} = \frac{12}{11} \end{cases}$$

$$\therefore a^2 = \frac{11}{6}, b^2 = \frac{11}{12}$$

となる。

(3)(a)

題意で与えられた試行が3回行われたとき、カード1, 2, 3, 4が取り出された枚数をそれぞれ

 a, b, c, d ($0 \leq a, b, c, d \leq 3$) とすると、

$$A = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

となるから、この行列が逆行列をもたない条件

$$ad - bc = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

と、引いたカードの枚数に関する条件

$$a + b + c + d = 3 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq a, b, c, d \leq 3 \quad \cdots \textcircled{6}$$

を満たす整数の組 (a, b, c, d) と、その組に対応するカードの引き方を考えればよい。以下 a, b, c, d の中に0が含まれているかどうかで場合分けして考える。

[1] 0が含まれていない場合

 $a, b, c, d \geq 1$ より、 $a + b + c + d \geq 4$ になってしまうからこのような場合はない。

[2] 0が少なくとも1つ含まれている場合

⑤より、2つ以上0を含むことになる。 a, b のみ0となる場合を考えると、これはカード3とカード4のみを引くが、どちらか一方のみのカードを引き続けることのない場合であるから、そのような場合の数は、

$$2^2 - 2 = 6 \quad \text{[通り]}$$

である。さらに、0になる2つの文字の選び方は4通りであるから、

$$6 \times 4 = 24 \quad \text{[通り]}$$

となる。

また、 a, b, c が0となる場合はカード4のみ引くような場合であるから1通りであり、0になる3つの文字の選び方を考慮すると

$$1^3 \times 4 = 4 \quad \text{[通り]}$$

となる。

したがって、[2]の場合の数は

$$24 + 4 = 28 \quad \text{[通り]}$$

と求める。

以上[1], [2]より、条件を満たすカードの引き方は

$$0 + 28 = 28 \quad \text{[通り]}$$

と求める。また、3回の試行を行った際のカードの引き方の総数は 4^3 通りあり、これらは同様に確からしく起こるから、求める確率は

$$P_3 = \frac{28}{4^3}$$

となる。

(b)

(a)と同様に考える。つまり、条件

$$ad - bc = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$a + b + c + d = 5 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq a, b, c, d \leq 5 \quad \cdots \textcircled{7}$$

を満たす整数の組 (a, b, c, d) と、その組に対応するカードの引き方を a, b, c, d の中に0が含まれているかどうかで場合分けして考える。

[1] 0が含まれていない場合

⑤より、 $a = b = c = d = 1$ または $a + b + c + d \geq 6$ になってしまうから、このとき⑦を満たさない。

[2] 0が少なくとも1つ含まれている場合

このような場合の数は、(a)と同じように考えて、

$$(2^5 - 2) \times 4 + 1^5 \times 4 = 124 \quad \text{[通り]}$$

である

以上[1], [2]より、条件を満たすカードの引き方は

$$0 + 124 = 124 \quad \text{[通り]}$$

と求める。また、5回の試行を行った際のカードの引き方の総数は 4^5 通りあり、これらは同様に確からしく起こるから、求める確率は

$$P_5 = \frac{124}{4^5}$$

となる。

(c)

(a)と同様に考える。つまり、条件

$$ad - bc = 0 \quad \cdots \textcircled{5}$$

$$a + b + c + d = 6 \quad \text{かつ} \quad 0 \leq a, b, c, d \leq 6 \quad \cdots \textcircled{7}$$

を満たす整数の組 (a, b, c, d) と、その組に対応するカードの引き方を a, b, c, d の中に0が含まれているかどうかで場合分けして考える。

[1] 0が含まれていない場合

⑤より、となる場合を考えればよい。まず、 $(a, d) = (b, c) = (1, 2)$ となる場合のカードの引き方は

$$\frac{6!}{1!2!1!2!} = 180 \quad \text{[通り]}$$

あり、 $\{a, d\} = \{b, c\} = \{1, 2\}$ となるような整数の組 (a, b, c, d) の選び方は4通りあるから、

[1]の場合の数は

$$180 \times 4 = 720 \quad \text{[通り]}$$

となる。

[2] 0が少なくとも1つ含まれている場合

このような場合の数は、(a)と同じように考えて、

$$(2^6 - 2) \times 4 + 1^6 \times 4 = 252 \quad \text{[通り]}$$

である

以上[1], [2]より、条件を満たすカードの引き方は

$$720 + 252 = 972 \quad \text{[通り]}$$

と求める。また、6回の試行を行った際のカードの引き方の総数は 4^6 通りあり、これらは同様に確からしく起こるから、求める確率は

$$P_6 = \frac{972}{4^6}$$

となる。

2

(1)

与えられた等式

$$\log_a y = (\log_a x)^2 - 3\log_a x + 3$$

を y について解くと,

$$\begin{aligned} y &= a^{(\log_a x)^2 - 3\log_a x + 3} \\ &= a^{(\log_a x)^2} \cdot a^{-3\log_a x} \cdot a^3 \\ &= x^{\log_a x} \cdot x^{-3} \cdot a^3 \\ &= a^3 \cdot x^{\log_a x - 3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad y = a^3 \cdot x^{\log_a x - 3}$$

(2)(a)

(1)の結果に $(a, x) = (9, 3)$ を代入して,

$$y = 9^3 \cdot 3^{\frac{1}{2} - 3} = 3^{\frac{7}{2}}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad y = 3^{\frac{7}{2}}$$

(b)

与えられた等式を, 対数の底の変換公式を用いて変形すると,

$$\begin{aligned} \log_a y &= (\log_a x)^2 - 3\log_a x + 3 \\ \Leftrightarrow \frac{\log y}{\log a} &= \frac{1}{(\log a)^2} (\log x)^2 - \frac{3}{\log a} \log x + 3 \end{aligned}$$

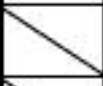
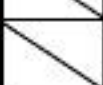
となるから, この両辺を x で微分すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\log a} \cdot \frac{y'}{y} &= \frac{1}{(\log a)^2} \cdot \frac{2\log x}{x} - \frac{3}{\log a} \cdot \frac{1}{x} \\ \Leftrightarrow y' &= \frac{1}{\log a} \cdot \frac{\log x^2 - \log a^3}{x} y \end{aligned}$$

となる。よって, 特に $y' = 0$ となるような x の値は

$$\begin{aligned} y' &= 0 \\ \Leftrightarrow \log x^2 - \log a^3 &= 0 \quad (\because y > 0) \\ \therefore x &= a^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であり, $a = 9$ のとき, $\frac{1}{\log a} > 0$ であるから, y の増減表は下記の通りになる。

x	(0)	$\cdots$	$9^{\frac{3}{2}} (= 27)$	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	最小	$\nearrow$

また, $x = 27$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= 9^3 \cdot 27^{\log_9 27 - 3} \\ &= 3^6 \cdot 3^{\frac{9}{2} - 3} \\ &= 3\sqrt{3} \end{aligned}$$

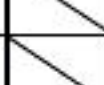
となるから, y は $x = 27$ のとき, 最小値 $3\sqrt{3}$ をとる。(答) y の最小値: $3\sqrt{3}$, そのときの x の値: 27

(3)

 $a > 1$ のとき, $y = a^3 \cdot x^{\log_a x - 3}$ の増減は(2)と同様になるから, x が正の実数全体を動くとき, y は最小値をもたない。よって $0 < a < 1$ となることが必要である。一方, $0 < a < 1$ のとき, y を x で微分した結果は同様に

$$y' = \frac{y}{x \log a} (\log x^2 - \log a^3)$$

となるが, ここで $\frac{1}{\log a} < 0$ となるから, y の増減表は下記の通りになる。

x	(0)	$\cdots$	$a^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$
y		$\nearrow$	最大	$\searrow$

また, $x = a^{\frac{3}{2}}$ のとき,

$$\begin{aligned} y &= a^3 \cdot \left(a^{\frac{3}{2}}\right)^{\log_a a^{\frac{3}{2}} - 3} \\ &= a^3 \cdot a^{\frac{9}{4} - 3} \\ &= a^{\frac{3}{4}} \end{aligned}$$

となるから, y は $x = a^{\frac{3}{2}}$ のとき, 最大値 $a^{\frac{3}{4}}$ をとる。したがって, この最大値が $\frac{\sqrt{2}}{4} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}}$ と等しくなるとき,

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{4}} &= \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{3}{4}} \\ \therefore a &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

である。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{1}{4}$$

3

(1)

与えられた関数 $f(x)$ を微分すると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(x-1) \cdot x^3 - (x-1)^2 \cdot 3x^2}{x^6} \\ &= -\frac{(x-1)(x-3)}{x^4} \end{aligned}$$

となるから、特に $f'(x)=0$ となる x を調べると、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -\frac{(x-1)(x-3)}{x^4} &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1, 3 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $f'(x)$ の符号に注意すると、 $x>0$ における $f(x)$ の増減表は下記の通りになる。

x	(0)	...	1	...	3	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$			極小		極大	

ここで、

$$f(1)=0, f(3)=\frac{4}{27}$$

であるから、 $f(x)$ は

$$x=3 \text{ のとき、極大値 } \frac{4}{27}$$

$$x=1 \text{ のとき、極小値 } 0$$

をとる。

$$\text{(答) 極大値: } \frac{4}{27} (x=3 \text{ のとき}), \text{ 極小値: } 0 (x=1 \text{ のとき})$$

(2)

t を $t>0$ を満たす実数とする。点 $(t, f(t))$ における $y=f(x)$ の接線は、

$$\begin{aligned} y &= f'(t)(x-t) + f(t) \\ &= -\frac{(t-1)(t-3)}{t^4}(x-t) + \frac{(t-1)^2}{t^3} \end{aligned}$$

と表せるから、この直線が $P(0, p)$ を通るとき、

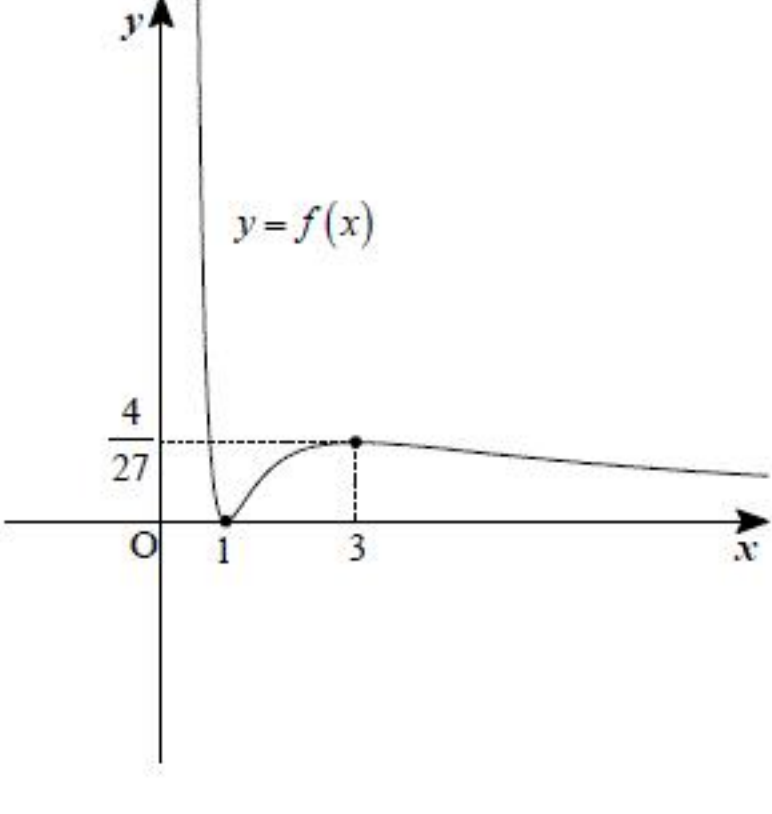
$$\begin{aligned} p &= \frac{(t-1)(t-3)}{t^3} + \frac{(t-1)^2}{t^3} \\ \Leftrightarrow p &= \frac{2t^2-6t+4}{t^3} \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

なる条件を満たす。

ここで、接線と接点 $(t, f(t))$ との対応関係を確認するために、(1)を利用して $y=f(x)$ のグラフの概形を描くことを考える。必要な極限を調べると、

$$\lim_{x \rightarrow +0} \frac{(x-1)^2}{x^3} = +\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x-1)^2}{x^3} = 0$$

であり、(1)で調べた増減と極値を利用することによって、 $y=f(x)$ のグラフの概形は以下の図のようになることがわかる。



上図より、2点以上で接するような接線は存在しないことがわかるから、接点と接線は1対1に対応することがわかる。したがって、点 P から $y=f(x)$ に引ける接線の本数は、 $\textcircled{1}$ を満たすような正の実数 t の個数と一致することがわかる。また、このような正の実数 t の個数は ty 平面上において、

$$y=p \text{ と } y=\frac{2t^2-6t+4}{t^3} \text{ の } t>0 \text{ における交点の個数}$$

に等しいから、以下、関数 $g(t)=\frac{2t^2-6t+4}{t^3}$ の概形について調べることにする。

この関数を t について微分すると、

$$\begin{aligned} g'(t) &= \frac{(4t-6)t^2 - (2t^2-6t+4) \cdot 3t^2}{t^6} \\ &= -\frac{2(t^2-6t+6)}{t^4} \end{aligned}$$

となるから、特に $g'(t)=0$ を満たす $t(>0)$ は

$$\begin{aligned} g'(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2-6t+6 &= 0 \\ \therefore t &= 3 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$g(3-\sqrt{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{9}, g(3+\sqrt{3}) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

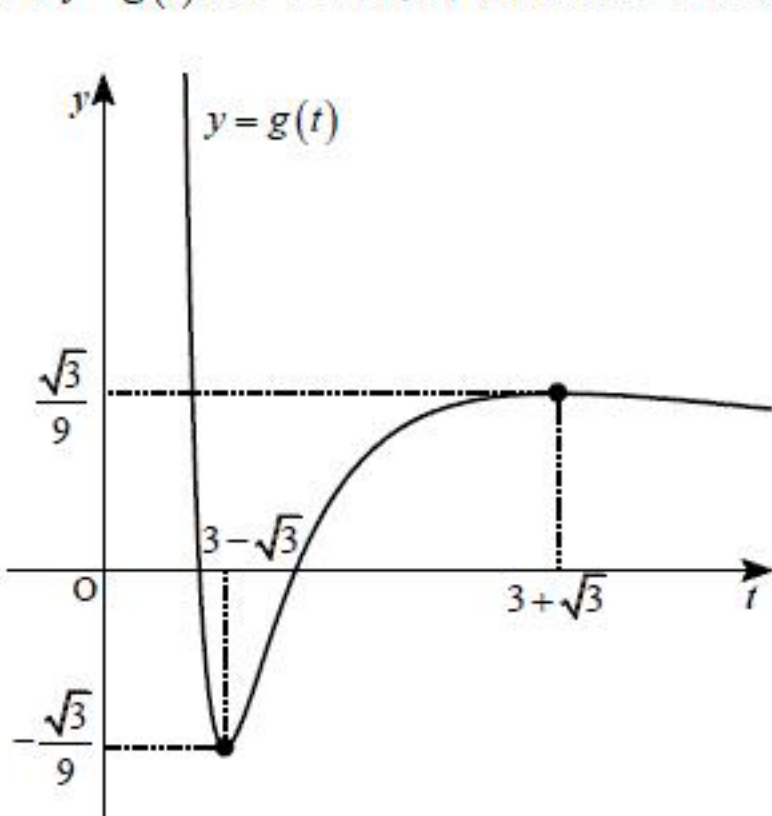
となるから、 $g(t)$ の増減表は以下のようになる。

t	(0)	...	$3-\sqrt{3}$	...	$3+\sqrt{3}$	...
$g'(t)$		-	0	+	0	-
$g(t)$			$-\frac{\sqrt{3}}{9}$		$\frac{\sqrt{3}}{9}$	

さらに、 $y=g(t)$ のグラフの概形を把握するために必要な極限の値を調べると、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +0} g(t) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{2t^2-6t+4}{t^3} \\ &= \infty \\ \lim_{t \rightarrow \infty} g(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{6}{t}+\frac{4}{t^2}}{t} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから、 $t>0$ における $y=g(t)$ のグラフは以下の図のようになる。



上図より、直線 $y=p$ と曲線 $y=g(t)$ の $t>0$ における交点の個数は、 p の値で場合分けして求めることで、

$$p < -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、0 個}$$

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、1 個}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{9} < p \leq 0 \text{ のとき、2 個}$$

$$0 < p < \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、3 個}$$

$$p = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、2 個}$$

$$p > \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、1 個}$$

となる。以上より、 $P(0, p)$ から曲線 $y=f(x)$ に引ける接線の本数は、

$$p < -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、0 個}$$

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、1 個}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{9} < p \leq 0 \text{ のとき、2 個}$$

$$0 < p < \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、3 個}$$

$$p = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、2 個}$$

$$p > \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、1 個}$$

と求まる。

$$\text{(答) } p < -\frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、} \quad \quad \quad 0 \text{ 個}$$

$$p = -\frac{\sqrt{3}}{9}, p > \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、} \quad \quad \quad 1 \text{ 個}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{9} < p \leq 0, p = \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、} \quad \quad \quad 2 \text{ 個}$$

$$0 < p < \frac{\sqrt{3}}{9} \text{ のとき、} \quad \quad \quad 3 \text{ 個}$$