

【解答】

(1)

ア 3	イ 5	ウ 4	エ 5	オ 4	カ 5
キ 3	ク 5	ケ 1	コ 5	サ 1	シ 7
ス 8	セ 1	ソ 7	タ 8	チ 1	ツ 7
テ 1	ト 5	ナ 1	ニ 7		

(2)

ア 5	イ 6	ウ 5	エ 5	オ 1	カ 0
キ 2	ク 5	ケ 3	コ 5		

(3)

ア 0	イ 8	ウ 3	エ 1	オ 0	カ 2
キ 1	ク 2	ケ 4			

【解説】

(1)

(a)

点 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ は 1 次変換 f によって $\begin{pmatrix} ax+by \\ cx+dy \end{pmatrix}$ に移動する。これが条件をみたすとき

$$\begin{aligned} (ax+by)^2 + (cx+dy)^2 &= x^2 + y^2 \\ \Leftrightarrow (a^2+c^2)x^2 + (b^2+d^2)y^2 + 2(ab+cd)xy &= x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore \begin{cases} a^2+c^2=1 \\ b^2+d^2=1 \\ ab+cd=0 \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。今 $\begin{pmatrix} \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ であるので、 $\textcircled{1}$ の条件をみたすものは

$$a = \frac{3}{5}, b = \frac{4}{5}, c = \frac{4}{5}, d = -\frac{3}{5}$$

となる。

(b)

$$A \begin{pmatrix} x \\ 4x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+4bx \\ cx+4dx \end{pmatrix}$$

が $y=4x$ 上にあるとき

$$\begin{aligned} 4(ax+4bx) &= (cx+4dx) \\ \therefore 4a+16b &= c+4d \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 $\textcircled{1}$ の条件と $b>0$ から、 $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} < \phi < \frac{\pi}{2}$ となる θ, ϕ を用いて

$$\begin{cases} a = \cos \theta \\ c = \sin \theta \end{cases}, \begin{cases} b = \cos \phi \\ d = \sin \phi \end{cases}$$

とおけることが分かる。このとき $ab+cd=0$ から

$$\begin{aligned} \cos(\theta-\phi) &= 0 \\ \therefore \theta &= \phi + \frac{\pi}{2}, \phi + \frac{3}{2}\pi \end{aligned}$$

となる。よって $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{cases} \cos \theta = -\sin \phi \\ \sin \theta = \cos \phi \end{cases}$$

となる。このとき $\textcircled{2}$ の条件から

$$\begin{aligned} 4(-\sin \phi + 4 \cos \phi) &= (\cos \phi + 4 \sin \phi) \\ \therefore 8 \sin \phi &= 15 \cos \phi \end{aligned}$$

となる。これと $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ から

$$\cos \phi = \frac{8}{17}$$

となるので

$$\begin{cases} a = \cos \theta = -\frac{15}{17} \\ b = \cos \phi = \frac{8}{17} \\ c = \sin \theta = \frac{8}{17} \\ d = \sin \phi = \frac{15}{17} \end{cases}$$

となる。次に $\theta = \phi + \frac{3}{2}\pi$ を考える。このとき

$$\begin{cases} \cos \theta = \sin \phi \\ \sin \theta = -\cos \phi \end{cases}$$

となる。これと $\textcircled{2}$ の条件から

$$\cos \phi = 0$$

となるが、これは $b>0$ となるため不適である。

(2)

(a)

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + 5 \cdot 3^n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{a_n}{3^n} + \frac{5}{3} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} - 5 \right) &= \frac{2}{3} \left(\frac{a_n}{3^n} - 5 \right) \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{3^n} - 5 &= \left(\frac{2}{3} \right)^{n-1} \left(\frac{a_1}{3} - 5 \right) \\ \therefore a_n &= 5 \cdot 3^n - 6 \cdot 2^n \end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned} a_{n+2} + 10a_{n+1} + 25a_n &= 0 \\ \therefore a_{n+2} + 5a_{n+1} &= -5(a_{n+1} + 5a_n) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= -5b_n \\ \Leftrightarrow b_n &= (-5)^{n-1} \cdot b_1 \\ \Leftrightarrow b_n &= (-5)^{n-1} \cdot (a_2 + 5a_1) \\ \therefore b_n &= 10 \cdot (-5)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} a_{n+1} + 5a_n &= 10 \cdot (-5)^{n-1} \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{(-5)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-5)^n} &= \frac{2}{5} \\ \Leftrightarrow \frac{a_n}{(-5)^n} &= \frac{a_1}{-5} + \frac{2}{5}(n-1) \\ \therefore a_n &= \frac{2}{5} \cdot n \cdot (-5)^n - \frac{3}{5}(-5)^n \end{aligned}$$

となる。

(3)

(a)

接点を (x_1, y_1) とおくと接線の方程式は

$$x_1x + (y_1-1)(y-1) = 1 \quad \cdots \textcircled{3}$$

となる。これが点 (a, b) を通るとき

$$\begin{aligned} x_1a + (y_1-1)(b-1) &= 1 \\ \therefore y_1-1 &= \frac{1-ax_1}{b-1} \quad (\because b>2) \end{aligned}$$

となる。これと C の方程式から

$$\begin{aligned} x_1^2 + \left(\frac{1-ax_1}{b-1} \right)^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow \left\{ (b-1)^2 + a^2 \right\} x_1^2 - 2ax_1 + \left\{ 1 - (b-1)^2 \right\} &= 0 \\ \therefore x_1 &= \frac{a \pm \sqrt{a^2 - \left\{ (b-1)^2 + a^2 \right\} \left\{ 1 - (b-1)^2 \right\}}}{a^2 + (b-1)^2} \end{aligned}$$

となる。今、解について、 $x_1 < x_2$ となるように x_1 とは異なる接点 (x_2, y_2) を定める。 $\textcircled{3}$ より、接

線と x 軸の交点の x 座標は $\frac{y_1}{x_1}$ となり、同様にしてもう一つの x 軸の交点の x 座標は $\frac{y_2}{x_2}$ とな

ることが分かる。よって $AB=4$ から

$$\begin{aligned} \frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{1-ax_2}{b-1} + 1}{x_2} - \frac{\frac{1-ax_1}{b-1} + 1}{x_1} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2 + (b-1)(x_1 - x_2)}{(b-1)x_1x_2} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{x_1 - x_2}{x_1x_2} &= 4 \cdot \frac{b-1}{b} \\ \Leftrightarrow \frac{-2\sqrt{a^2 - \left\{ (b-1)^2 + a^2 \right\} \left\{ 1 - (b-1)^2 \right\}}}{\frac{a^2 + b^2}{\left\{ 1 - (b-1)^2 \right\}}} &= 4 \left(\frac{b-1}{b} \right) \\ \Leftrightarrow b^2 \left(a^2 - \left\{ (b-1)^2 + a^2 \right\} \left\{ 1 - (b-1)^2 \right\} \right) &= 4(b-1)^2 \left\{ 1 - (b-1)^2 \right\}^2 \\ \Leftrightarrow a^2 &= 3(b-1)^2 - 8(b-1) + 5 \\ \therefore b &= \frac{7 \pm \sqrt{3a^2 + 1}}{3} \end{aligned}$$

となる。今、三角形 PAB の底辺を AB とすると AB の長さは固定なので b が最小となるとき

面積も最小となる。よって $a=0$ のとき最小となり、 $b>2$ からこのとき $b = \frac{8}{3}$ となる。

(b)

接点を $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ とおき、 C の中心を点 C とおくと $\angle APB = \frac{\pi}{2}$ のとき四角形

S_1CS_2P は 1 辺の長さが 1 の正方形となる。よって

$$\begin{aligned} CP &= \sqrt{2} \\ \Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 &= 2 \\ \therefore a^2 + b^2 - 2b &= 1 \end{aligned}$$

となる。

(c)

(a)より中点の x 座標は $\frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \right)$ となるので

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left(\frac{y_1}{x_1} + \frac{y_2}{x_2} \right) &= 2 \\ \Leftrightarrow \frac{\frac{x_2 - ax_1x_2 + x_1 - ax_1x_2}{(b-1)} + (x_1 + x_2)}{x_1x_2} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{2a + (b-1)(2a)}{(b-1)\{1 - (b-1)^2\}} - \frac{2a}{b-1} &= 4 \\ \Leftrightarrow 2a + (b-1)2a - 2a\{1 - (b-1)^2\} &= 4(b-1)\{1 - (b-1)^2\} \\ \therefore a + 2b &= 4 \end{aligned}$$

となる。

(1)

$2x+1=t$ とおくと $x=\frac{t-1}{2}$ となり, $dx=\frac{dt}{2}$ となる。

$$\begin{array}{c|cc} x & 1 & \rightarrow 4 \\ \hline t & 3 & \rightarrow 9 \end{array}$$

よって

$$\begin{aligned} \int_1^4 \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx &= \int_3^9 \frac{\frac{t-1}{2}}{\sqrt{t}} \cdot \frac{dt}{2} \\ &= \frac{1}{4} \int_3^9 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} \right) dt \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} - 2 \cdot t^{\frac{1}{2}} \right]_3^9 \\ &= 3 \end{aligned}$$

となる。

(答) 3

(2)

(a)

実数 s, t を用いて $\overrightarrow{OH} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ とおけるので, $H(-t, s, s+2t)$ となる。今

$$\overrightarrow{PH} = (-t-3, s-2, s+2t-2)$$

であり, PH が平面 α に直交するとき

$$\begin{aligned} &\begin{cases} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OA} = 0 \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (-t-3) \cdot 0 + (s-2) \cdot 1 + (s+2t-2) \cdot 1 = 0 \\ (-t-3) \cdot (-1) + (s-2) \cdot 0 + (s+2t-2) \cdot 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

をみtas。これを解くと $s=3, t=-1$ となるので $H(1, 3, 1)$ である。

(答) (1, 3, 1)

(b)

点 P と平面 α に関して対称な点 P' の座標は, (a)の結果を $H'(1, 3, 1)$ とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{PH'} \\ &= (3, 2, 2) + 2(-2, 1, -1) \\ &= (-1, 4, 0) \end{aligned}$$

である。ここで, PH と QH の長さが最小となるのは, 直線 $P'Q$ 上に H が存在するときである。即ち実数 k を用いて

$$\overrightarrow{P'H} = k\overrightarrow{P'Q}$$

となればよい。(a)の結果により,

$$\overrightarrow{P'Q} = (6, -9, -3), \quad \overrightarrow{P'H} = (-t+1, s-4, s+2t)$$

であるので, これを解くと $s=1, t=-1$ となる。よって $H(1, 1, -1)$ となる。

(答) (1, 1, -1)

(1)

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ か $\alpha = \frac{\pi}{2}$ によって場合分けを行う。

[1] $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

焦点は $(1, 0)$ であるから、直線 l の方程式は $y = (\tan \alpha)x - \tan \alpha$ となる。これを放物線 C の方程式に代入すると

$$\begin{aligned} (\tan \alpha x - \tan \alpha)^2 &= 4x \\ \therefore x &= \frac{\tan^2 \alpha + 2 \pm \sqrt{(\tan^2 \alpha + 2)^2 - \tan^4 \alpha}}{\tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

となる。今 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、 $AB = AF + FB$ であり、準線は $x = -1$ であるので、放物線の点は焦点との距離と準線との距離が等しいことを利用すると $AF = x_1 + 1, BF = x_2 + 1$ となる。よって

$$\begin{aligned} AB &\leq 8 \\ \Leftrightarrow 2 + \frac{\tan^2 \alpha + 2}{\tan^2 \alpha} \cdot 2 &\leq 8 \\ \Leftrightarrow \tan^2 \alpha &\geq 1 \\ \therefore \frac{\pi}{4} &\leq \alpha < \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha \leq \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

となる。

[2] $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

焦点は $(1, 0)$ であるから、直線 l の方程式は $x = 1$ となる。よって、 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ とすると、 $x_1 = x_2 = 1$ である。[1]と同様に考えて、 $AF = x_1 + 1, BF = x_2 + 1$ であるから、

$$AB = 2 + x_1 + x_2 = 4$$

となる。よって $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき $AB \leq 8$ が成り立つ。

以上[1], [2]より、求める α の範囲は $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{3\pi}{4}$$

(2)

$\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ か $\alpha = \frac{\pi}{2}$ によって場合分けを行う。

[1] $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ のとき

直線 l の方程式 $y = (\tan \alpha)x - \tan \alpha$ を楕円の方程式 $3x^2 + 2y^2 = 2$ に代入すると

$$\begin{aligned} 3x^2 + 2\{(\tan \alpha)x - \tan \alpha\}^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow (3 + 2\tan^2 \alpha)x^2 - 4(\tan^2 \alpha)x + (2\tan^2 \alpha - 2) &= 0 \end{aligned}$$

となる。楕円と直線 l が共有点を持つための条件はこの方程式が実数解を持つことであるので、判別式を D とおくと

$$\begin{aligned} D &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (-2\tan^2 \alpha)^2 - (3 + 2\tan^2 \alpha)(2\tan^2 \alpha - 2) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \tan^2 \alpha &\leq 3 \\ \therefore 0 < \alpha &\leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \alpha < \pi \end{aligned}$$

となる。(1)の条件と合わせて、求める条件は

$$\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$$

となる。

[2] $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき

直線 l の方程式 $x = 1$ を楕円の方程式 $3x^2 + 2y^2 = 2$ に代入すると

$$\begin{aligned} 3 + 2y^2 &= 2 \\ \Leftrightarrow 2y^2 &= -1 \end{aligned}$$

となる。これは実数解を持たないから、 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のとき直線 l と楕円は共有点を持たない。

以上[1], [2]より、求める α の範囲は $\frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$ である。

$$(\text{答}) \quad \frac{\pi}{4} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3} \leq \alpha \leq \frac{3}{4}\pi$$