

〔解答〕

ア 2	イ 3	ウ 1	エ 2	オ 5	カ 1
キ 2	ク 3	ケ 2	コ 3		

〔解説〕

$$L(a, b) = \sqrt{(b-a)^2 + (b^2 - a^2)^2} = (b-a)\sqrt{(b+a)^2 + 1}$$

$$S(a, b) = \frac{b^2 + a^2}{2}(b-a) - \int_a^b x^2 dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$

$$T(a, b) = \int_a^b x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3}$$

であることを利用して以下の問題を解く。

(1)

(a)

$$L(0, t) = \frac{1}{2}L(0, 1)$$

$$\Leftrightarrow t\sqrt{t^2+1} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2t^4 + 2t^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore t^2 = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2} (\because t^2 > 0)$$

となる。

(b)

$$L(0, t) = L(t, 1)$$

$$\Leftrightarrow t\sqrt{t^2+1} = (1-t)\sqrt{(t+1)^2+1}$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

となり, ここで $0 < t < 1$ であるので

$$t = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

となる。

(2)

(a)

$$S(0, t) = \frac{1}{2}S(0, 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{t^3}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{6}$$

$$\Leftrightarrow t^3 = 4$$

$$\Leftrightarrow 3\log_2 t = 2$$

$$\therefore \log_2 t = \frac{2}{3}$$

となる。

(b)

$$T(t, 2) = S(0, 2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}(8 - t^3) = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow t^3 = 4$$

$$\therefore \log_2 t = \frac{2}{3}$$

となる。

〔解答〕

ア 1	イ 0	ウ 7	エ 2	オ 5	カ 2
キ 1	ク 1	ケ 2	コ 2	サ 7	シ 2
ス 3	セ 1	ソ 5	タ 6	チ 4	ツ 1
テ 0	ト 5	ナ 1	ニ 6		

〔解説〕

(1)

与式は

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x = k$$

と変形できる。ここで $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x$ とおく。

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\ &= 3(x-2)(x+1) \end{aligned}$$

であるので、 $f(x)$ の増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	$\frac{7}{2}$	↘	-10	↗

よって、 $f(x) = k$ が 3 つの異なる実数解を持つ条件は

$$-10 < k < \frac{7}{2}$$

であることが分かる。

(2)

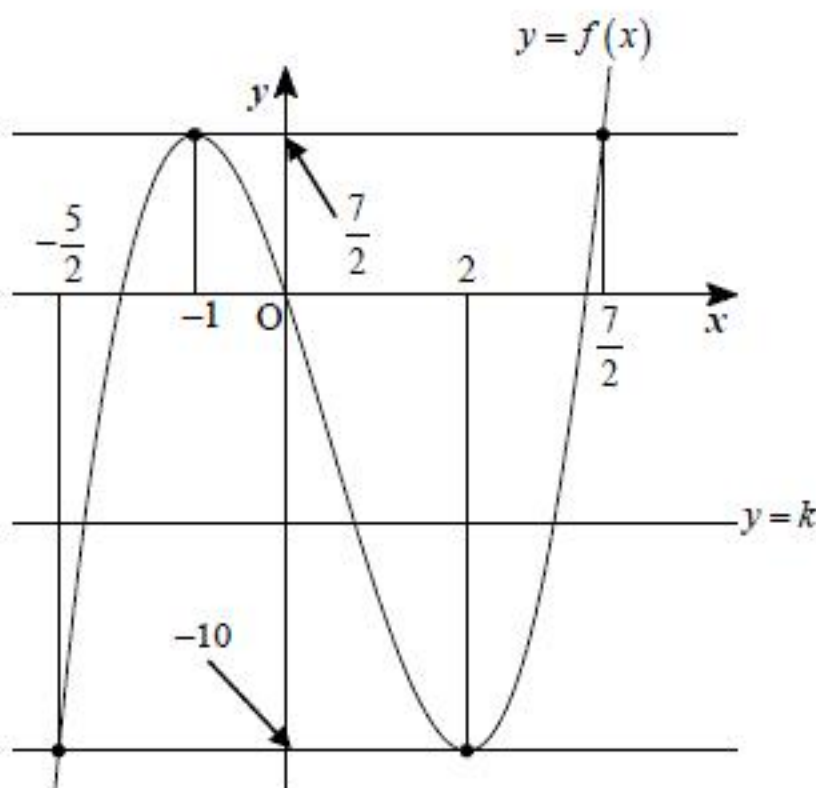
(a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{7}{2} \\ \Leftrightarrow (x+1)^2(2x-7) &= 0 \\ \therefore x &= -1, \frac{7}{2} \end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned} f(x) &= -10 \\ \Leftrightarrow (x-2)^2(2x+5) &= 0 \\ \therefore x &= 2, -\frac{5}{2} \end{aligned}$$

であるので、関数 $y = f(x)$ と $y = k$ の関係は下図のようになる。



よって α, β, γ の取りうる値の範囲は

$$-\frac{5}{2} < \alpha < -1, -1 < \beta < 2, 2 < \gamma < \frac{7}{2}$$

であることが分かる。

(b)

与式に関して解と係数の関係から

$$\alpha\beta\gamma = k$$

が成り立つ。また、 $k = \beta^3 - \frac{3}{2}\beta^2 - 6\beta$ であるので

$$\alpha\beta\gamma = \beta^3 - \frac{3}{2}\beta^2 - 6\beta \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。今、ここで $\beta \neq 0$ の場合を考える。このとき、①は

$$\begin{aligned} \alpha\gamma &= \beta^2 - \frac{3}{2}\beta - 6 \\ &= \left(\beta - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{105}{16} \end{aligned}$$

となる。(a)で求めた範囲から、 $\alpha\gamma$ は $\beta = \frac{3}{4}$ のとき最小値 $-\frac{105}{16}$ を取ることが分かる。また、こ

のとき $k = \alpha\beta\gamma = -\frac{315}{64}$ となる。

次に、 $\beta = 0$ の場合を考えると、与式に関して解と係数の関係から

$$\begin{aligned} \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha &= -6 \\ \therefore \alpha\gamma &= -6 \end{aligned}$$

となるが、この値は $-\frac{105}{16}$ より大きい。

よって、 $\alpha\gamma$ の最小値は $-\frac{105}{16}$ であり、そのとき $k = -\frac{315}{64}$ となることが分かる。

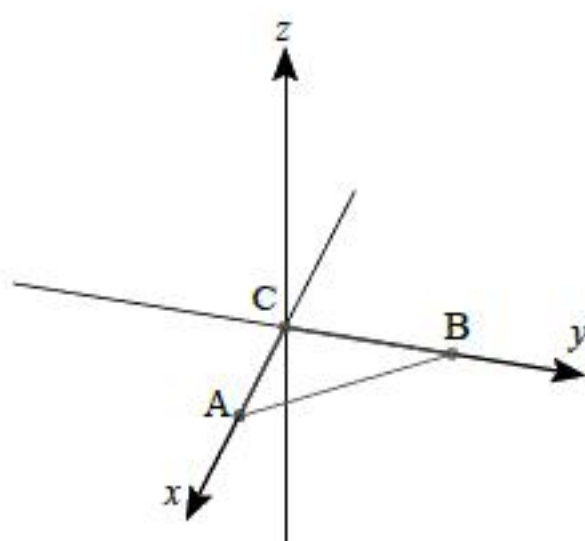
3

【解答】

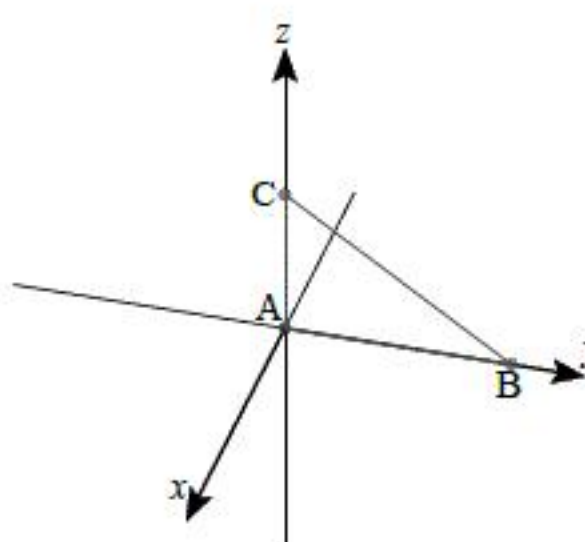
ア 5	イ 1	ウ 3	エ 1	オ 2	カ 1
キ 3	ク 1	ケ 6	コ 2	サ 6	シ 2
ス 5	セ 1	ソ 4	タ 9	チ 7	ツ 2
テ 2	ト 1	ナ 4	ニ 3	ヌ 5	ネ 2
ノ 8					

【解説】

(1)



上図のように、Cが原点となるとき a は最小となり、その値は三平方の定理から $\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$ となる。



また、上図のように、Aが原点となるとき a は最大となり、その値は $\sqrt{13}$ となる。

(2)

(a)

三角形ABCに対し、余弦定理から

$$\begin{aligned}\cos \angle BAC &= \frac{2^2 + 3^2 - a^2}{2 \cdot 2 \cdot 3} \\ &= \frac{1}{12}(-a^2 + 13)\end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned}S^2 &= \left(\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin \angle BAC \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} AB^2 \cdot AC^2 \cdot (1 - \cos^2 \angle BAC) \\ &= 9 \left(1 - \frac{(-a^2 + 13)^2}{144} \right) \\ &= \frac{1}{16}(-a^4 + 26a^2 - 25)\end{aligned}$$

となる。

(3)

OA = x であるとき三角形 OAC, OAB に対して三平方の定理から、それぞれ

OC = $\sqrt{4-x^2}$, OB = $\sqrt{9-x^2}$ となり、三角形 OBC に対して三平方の定理より

$$\begin{aligned}a^2 &= 4 - x^2 + 9 - x^2 \\ &= 13 - 2x^2\end{aligned}$$

となる。これを前問の結果に代入すると

$$\begin{aligned}S^2 &= \frac{1}{16} \left\{ -(13 - 2x^2)^2 + 26(13 - 2x) - 25 \right\} \\ &= -\frac{1}{4}x^4 + 9\end{aligned}$$

となる。

(4)

$S = 2\sqrt{2}$ のとき

$$\begin{aligned}8 &= -\frac{1}{4}x^4 + 9 \\ \Leftrightarrow x^4 &= 4 \\ \Leftrightarrow x^2 &= 2 (\because x^2 > 0) \\ \therefore x &= \sqrt{2} (\because x > 0)\end{aligned}$$

となる。よって、OA = $\sqrt{2}$, OB = $\sqrt{7}$, OC = $\sqrt{2}$ となる。今、四面体 OABC の体積を V とおくと

$$\begin{aligned}V &= \left(\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \sqrt{7} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{\sqrt{7}}{3}\end{aligned}$$

となる。また、 $V = (\triangle OAB + \triangle OBC + \triangle OAC + \triangle ABC) \times r \times \frac{1}{3}$ であるので

$$\begin{aligned}r \left(1 + \frac{\sqrt{14}}{2} + \frac{\sqrt{14}}{2} + 2\sqrt{2} \right) \cdot \frac{1}{3} &= \frac{\sqrt{7}}{3} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{7}}{1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{14}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{7}(-1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{14})}{(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{14})(-1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{14})} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{7}(-1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{14})}{5 - 4\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{\sqrt{7}(-1 - 2\sqrt{2} + \sqrt{14})(5 + 4\sqrt{2})}{(5 - 4\sqrt{2})(5 + 4\sqrt{2})} \\ \therefore r &= 3\sqrt{7} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{14} - 8\end{aligned}$$

となる。

【解答】

ア 2	イ 6	ウ 2	エ 2	オ 3	カ 3
キ 9	ク 9	ケ 9	コ 1	サ 6	シ 1
ス 0	セ 3	ソ 3	タ 3	チ 2	ツ 9
テ 4	ト 4	ナ 6	ニ 4	ヌ 5	ネ 1
ノ 8					

(1)

(a)

$n=2$ のとき, 12 または 21 が考えられるので ${}_2S_2=2$ となる。

$n=3$ のとき, 112, 121, 211, 122, 212, 221 が考えられるので ${}_2S_3=6$ となる。

一般に, 1, 2 を n 桁並べた時にできる数の個数は 2^n であり, 今, 1 も 2 も少なくとも 1 つの位には現れなければならないので, 条件をみたす要素の個数は 2^n から 1 のみまたは 2 のみが出るものの個数を引いた個数である。よって

$${}_2S_n = 2^n - 2$$

となる。

(b)

(a)

(a)より $f_2(2)=33, f_3(3)=999$ となる。

今 1, 2 のみを用いた n 桁の数を考える。この数の 1 と 2 を逆にした数(即ち 112 に対して 221 等)を作ると, 両者の和は

$$\underbrace{333\cdots 33}_n = \frac{3}{9}(10^n - 1)$$

となる。ここで, ある条件をみたす 1, 2 のみを用いた n 桁の数について考えると, 1 と 2 を逆にした数もまた条件をみたすことから,

$$f_2(n) = \frac{3}{9}(10^n - 1) \cdot {}_2S_n \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}(10^n - 1) \cdot {}_2S_n$$

となる。

(2)

(a)

(1)と同様に考える。条件をみたす数の個数は 1, 2, 3 を n 桁並べた時にできる数の個数から数字が 2 つのみ現れるものと, 1 つのみ現れるものの個数を引いた個数であるので

$$\begin{aligned} {}_3S_n &= 3^n - {}_3C_2 \cdot {}_2S_n - {}_3C_1 \cdot 1 \\ &= 3^n - 3 \cdot 2^n + 3 \end{aligned}$$

となる。

(b)

1, 2, 3 のみを用いた n 桁の数を考える。この数の 1 と 3 を逆にした数を作ると, 両者の和は

$$\underbrace{444\cdots 44}_n = \frac{4}{9}(10^n - 1)$$

となる。ここで, ある条件をみたす 1, 2, 3 のみを用いた n 桁の数について考えると, 1 と 3 を逆にした数もまた条件をみたすことから,

$$f_3(n) = \frac{4}{9}(10^n - 1) \cdot \frac{{}_3S_n}{2} = \frac{2}{9}(10^n - 1) \cdot {}_3S_n$$

となる。

(3)

(a)

(1)と同様に考える。条件をみたす数の個数は 1, 2, 3, 4 を n 桁並べた時にできる数の個数から数字が 3 つのみ現れるもの, 2 つのみ現れるもの, 1 つのみ現れるものの個数を引いた個数であるので

$$\begin{aligned} {}_4S_n &= 4^n - {}_4C_3 \cdot {}_3S_n - {}_4C_2 \cdot {}_2S_n - 4 \\ &= 4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4 \end{aligned}$$

となる。

(b)

1, 2, 3, 4 のみを用いた n 桁の数を考える。この数の各桁の 1 と 4 及び 2 と 3 を逆にした数を作ると, 両者の和は

$$\underbrace{555\cdots 55}_n = \frac{5}{9}(10^n - 1)$$

となる。ここで, ある条件をみたす 1, 2, 3, 4 のみを用いた n 桁の数について考えると, 1 と 4 及び 2 と 3 を逆にした数もまた条件をみたすことから,

$$f_4(n) = \frac{5}{9}(10^n - 1) \cdot \frac{{}_4S_n}{2} = \frac{5}{18}(10^n - 1) \cdot {}_4S_n$$

となる。