

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ
1	3	2	9	1	4
キ	ク	ケ	コ	サ	シ
1	1	3	1	4	1
ス	セ	ソ	タ		
1	3	1	3		

〔解説〕

(1)

まず、 P_2 について考える。1分後には白以外の3色のどれかに変わる。それがどの色であっ

ても、次の1分後に白に変わる確率はそれぞれ $\frac{1}{3}$ で等しいから、求める確率は

$$P_2 = 1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

となる。

次に、 Q_2 について考える。2分後に赤であるような色の変化は、

1分後に黄、2分後に赤

1分後に緑、2分後に赤

の2通りがある。したがって、求める確率は、

$$Q_2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

となる。

(2)

まず、 P_n について考える。 $n+1$ 分後に白であるのは、 n 分後に白以外の色であるときである。

n 分後に赤、黄、緑のいずれであっても、次の1分後に白に変わる確率は $\frac{1}{3}$ であるから、漸化

式

$$P_{n+1} = \frac{1}{3}(1 - P_n) = -\frac{1}{3}P_n + \frac{1}{3}$$

が成り立つ。漸化式を変形すると、

$$P_{n+1} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(P_n - \frac{1}{4}\right)$$

$$P_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(P_1 - \frac{1}{4}\right)$$

となり、1分後に白である確率 P_1 は0であることから、

$$P_n = \frac{1}{4} \left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

と求まる。

次に、 Q_n について考えると、色の変化の仕方の対称性から、 Q_n に対しても同様に

$$Q_{n+1} = -\frac{1}{3}Q_n + \frac{1}{3}$$

$$\therefore Q_n - \frac{1}{4} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(Q_1 - \frac{1}{4}\right)$$

が成り立つ。したがって、 $Q_1 = \frac{1}{3}$ であることより、

$$Q_n = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$$

と求まる。

〔解答〕

チ	ツ	テ	ト	ナ
3	3	1	2	1

〔解説〕

条件より、 $f(x)$ は整数 a, b, c を用いて

$$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

と表せる。また、 $f(x)$ は

$$\begin{aligned}\frac{-\sqrt[3]{2}-2+\sqrt[3]{2}\sqrt{3}i}{2} &= \frac{-2^{\frac{1}{3}}-2+2^{\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{3}i}{2} \\ &= -2^{\frac{2}{3}}-1+2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}i\end{aligned}$$

を解にもつので、

$$-2^{\frac{2}{3}}-1-2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}i$$

も解にもつ。また、 $f(x)=0$ の実数解を α とおくと、

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-\alpha)\left\{x-\left(-2^{\frac{2}{3}}-1+2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}i\right)\right\}\left\{x-\left(-2^{\frac{2}{3}}-1-2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}i\right)\right\} \\ &= (x-\alpha)\left\{x^2+\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)x+\left(-2^{\frac{2}{3}}-1\right)^2-\left(2^{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{3}i\right)^2\right\} \\ &= (x-\alpha)\left\{x^2+\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)x+\left(2^{\frac{4}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)+2^{\frac{4}{3}}\cdot 3\right\} \\ &= (x-\alpha)\left\{x^2+\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)x+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right\} \\ &= x^3+\left(2^{\frac{1}{3}}+2-\alpha\right)x^2+\left\{\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)-\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)\alpha\right\}x-\alpha\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)\end{aligned}$$

と計算できるので、

$$a = 2^{\frac{1}{3}}+2-\alpha \quad \cdots \textcircled{1}$$

$$b = \left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)-\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)\alpha \quad \cdots \textcircled{2}$$

$$c = -\alpha\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

が成り立つ。①より、

$$\alpha = 2^{\frac{1}{3}}+2-a \quad \cdots \textcircled{4}$$

であるから、④を②に代入して、

$$\begin{aligned}b &= \left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)-\left(2^{\frac{1}{3}}+2\right)\left(2^{\frac{1}{3}}+2-a\right) \\ &= \left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right)-\left\{2^{\frac{2}{3}}+(4-a)2^{\frac{1}{3}}+4-2a\right\} \\ &= (a-3)2^{\frac{1}{3}}+2a-3\end{aligned}$$

と計算できる。 a, b は整数であるから、上式より、

$$a = 3$$

と求まる。このとき、

$$b = 3, \alpha = 2^{\frac{1}{3}}-1 \quad \cdots \textcircled{5}$$

となる。また、⑤を③に代入すると、

$$\begin{aligned}c &= -\left(2^{\frac{1}{3}}-1\right)\left(2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}+1\right) \\ &= -\left(2+2^{\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}-2^{\frac{2}{3}}-2^{\frac{1}{3}}-1\right) \\ &= -1\end{aligned}$$

となり、条件を満たす。以上より、

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 1$$

であり、 $f(x)=0$ の実数解は、

$$x = 2^{\frac{1}{3}}-1$$

である。

〔解答〕

ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ
1	5	6	5	1	6
フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム
5	1	1	5	5	2
メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ
1	5	3	1	5	3

〔解説〕

ある x の多項式 $Q(x)$ をおくと、条件より

$$\{P(x)\}^5 - x = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$$

と表すことができる。この式に $x=1, 2, 3$ をそれぞれ代入すると

$$\begin{cases} \{P(1)\}^5 - 1 = 0 \\ \{P(2)\}^5 - 2 = 0 \\ \{P(3)\}^5 - 3 = 0 \end{cases}$$

を得る。これに $P(x) = ax^2 + bx + c$ を用いると

$$\begin{cases} (a+b+c)^5 = 1 \\ (4a+2b+c)^5 = 2 \\ (9a+3b+c)^5 = 3 \end{cases}$$

となり、この5乗根をとると

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ 4a+2b+c=2^{\frac{1}{5}} \\ 9a+3b+c=3^{\frac{1}{5}} \end{cases}$$

である。この連立方程式を解くと

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \left(3^{\frac{1}{5}} - 2^{\frac{6}{5}} + 1 \right) \\ b = -\frac{1}{2} \cdot 3^{\frac{6}{5}} + 2^{\frac{11}{5}} - \frac{5}{2} \\ c = 3^{\frac{1}{5}} - 3 \cdot 2^{\frac{1}{5}} + 3 \end{cases}$$

がわかる。

〔解答〕

リ	ル	レ	ロ	ワ	ヲ
1	2	1	1	6	1
ン	あ	い	う	え	お
8	4	2	2	4	3

〔解説〕

(1)

C は x 軸と接するため、 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D_1 とおくと、

$$D_1 = b^2 - 4ac = 0 \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。一方、 C は ℓ_1 とも接するため、 $ax^2+bx+c=x$ の判別式を D_2 とおくと、

$$D_2 = (b-1)^2 - 4ac = 0 \quad \cdots \textcircled{2}$$

となる。①および②より ac を消去すると、

$$b^2 = (b-1)^2$$

$$\therefore b = \frac{1}{2}$$

となる。これを①式へ代入して ac を求めると、

$$ac = \frac{b^2}{4} = \frac{1}{16}$$

となる。

(2)

点 P および点 Q の x 座標をそれぞれ p, q とおくと、これらはそれぞれ 2 次方程式

$ax^2+bx+c=0$ 、 $ax^2+bx+c=x$ の重解であるから、

$$p = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{4a}$$

$$q = -\frac{b-1}{2a} = \frac{1}{4a}$$

となる。点 P は x 軸上の点であるから、点 P の座標は $\left(-\frac{1}{4a}, 0\right)$ となる。(1)の結果より ℓ_2 の方

程式は $y = -2x - d$ であり、この直線上に点 P があることから、

$$0 = -2p - d$$

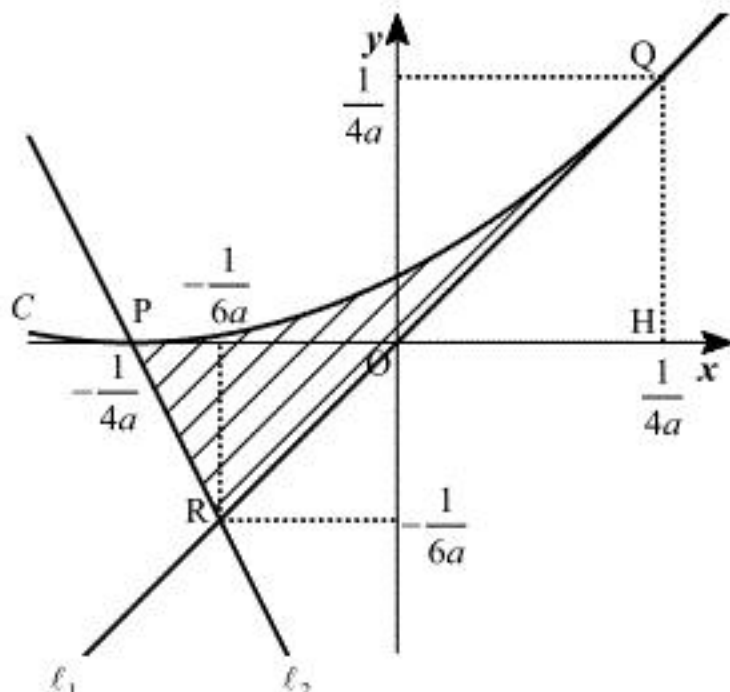
$$\therefore d = \frac{1}{2a}$$

となる。したがって、 ℓ_1 と ℓ_2 の交点 R の x 座標を求めると、

$$-2x - \frac{1}{2a} = x$$

$$\therefore x = -\frac{1}{6a}$$

となる。したがって、図示すると以下の通りである。



Q から x 軸におろした垂線の足を H とすると、求める図形の面積は上図の斜線部であるから、

$$\int_{-\frac{1}{4a}}^{\frac{1}{4a}} (ax^2 + bx + c) dx + (\triangle OPR \text{ の面積}) - (\triangle OQH \text{ の面積})$$

$$= \int_{-\frac{1}{4a}}^{\frac{1}{4a}} \left(ax^2 + bx + \frac{ac}{a} \right) dx + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{6a} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4a} \cdot \frac{1}{4a}$$

$$= 2 \left[\frac{a}{3} x^3 + \frac{x}{16a} \right]_0^{\frac{1}{4a}} + \frac{1}{48a^2} - \frac{1}{32a^2}$$

$$= 2 \left(\frac{1}{3 \cdot 64a^2} + \frac{1}{64a^2} \right) - \frac{1}{96a^2}$$

$$= \frac{1}{32a^2}$$

であり、これが 2 に等しいことから、

$$\frac{1}{32a^2} = 2$$

$$\therefore a = \frac{1}{8} (\because a > 0)$$

$$d = \frac{1}{2a} = 4$$

となる。

(3)

(2)より点 P の座標は $\left(-\frac{1}{4a}, 0\right)$ であるから、

$$\text{点 } P: \left(-\frac{1}{4} \cdot 8, 0\right) = (-2, 0)$$

である。また、点 Q, R は直線 $y = x$ 上にあり、 x 座標はそれぞれ $\frac{1}{4a}, -\frac{1}{6a}$ であるから、

$$\text{点 } Q: \left(\frac{1}{4} \cdot 8, \frac{1}{4} \cdot 8\right) = (2, 2)$$

$$\text{点 } R: \left(-\frac{1}{6} \cdot 8, -\frac{1}{6} \cdot 8\right) = \left(-\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

となる。