

1

【解答】

- (1)

ア	3
イ	6
ウ	9
エ	1
オ	2
カ	2
キ	5

 (2)

ク	3
ケ	5
コ	2
サ	3
シ	2
ス	1
セ	5

 (3)

ソ	4
タ	4
チ	5
ツ	1
テ	2
ト	8
ナ	5

 (4)

ニ	1
ノ	6
ハ	4
ヒ	9
フ	7
ヘ	3
ホ	6
マ	5
ミ	5
ム	1
メ	0
モ	8

 (5)

ヤ	4
ユ	3
ヨ	2
ラ	1
リ	6

【解説】

(1)

$$y = e^x (3 \sin 2x - \cos x) \text{ のとき,}$$

$$y' = e^x (3 \sin 2x - \cos x) + e^x (6 \cos 2x + \sin x)$$

$$= e^x (3 \sin 2x + 6 \cos 2x + \sin x - \cos x),$$

$$y'' = e^x (3 \sin 2x + 6 \cos 2x + \sin x - \cos x) + e^x (6 \cos 2x - 12 \sin 2x + \cos x + \sin x)$$

$$= e^x (-9 \sin 2x + 12 \cos 2x + 2 \sin x)$$

となる。ここで、 $y'' - ay' + by = -3e^x \cos x$ とおくと、左辺は

$$e^x \{(-9 \sin 2x + 12 \cos 2x + 2 \sin x) - a(3 \sin 2x + 6 \cos 2x + \sin x - \cos x) + b(3 \sin 2x - \cos x)\}$$

$$= e^x \{(-3a + 3b - 9) \sin 2x + (-6a + 12) \cos 2x + (-a + 2) \sin x + (a - b) \cos x\}$$

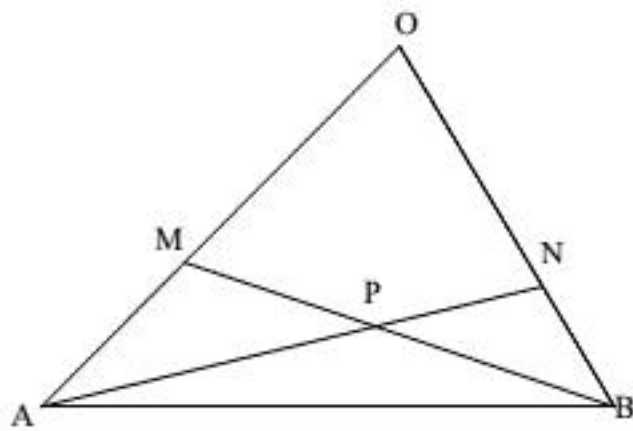
となる。係数比較して、

$$\begin{cases} -3a + 3b - 9 = 0 \\ -6a + 12 = 0 \\ -a + 2 = 0 \\ a - b = -3 \end{cases}$$

$$\therefore a = 2, b = 5$$

を得る。よって、 $y'' - 2y' + 5y = -3e^x \cos x$ である。

(2)



$OM : MA = 3 : 2, ON : NB = 2 : 1$ より $\overrightarrow{OM} = \frac{3}{5} \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{ON} = \frac{2}{3} \overrightarrow{OB}$ である。ここで、

$$AP : PN = s : 1 - s, BP : PM = t : 1 - t$$

とおくと、 $\overrightarrow{OP}$ は

$$\overrightarrow{OP} = s \overrightarrow{ON} + (1 - s) \overrightarrow{OA}$$

$$= (1 - s) \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3} s \overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{OP} = t \overrightarrow{OM} + (1 - t) \overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{3}{5} t \overrightarrow{OA} + (1 - t) \overrightarrow{OB}$$

と表せる。 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$ は 1 次独立であるから、

$$1 - s = \frac{3}{5} t, \frac{2}{3} s = 1 - t$$

$$\therefore s = \frac{2}{3}, t = \frac{5}{9}$$

となる。よって、

$$AP : PN = 2 : 1, BP : PM = 5 : 4$$

である。また、

$$\triangle APM = \frac{PM}{PB} \triangle PAB = \frac{4}{5} \triangle PAB,$$

$$\triangle BPN = \frac{NP}{PA} \triangle PAB = \frac{1}{2} \triangle PAB$$

であるから、

$$\triangle APM : \triangle BPN = \frac{4}{5} : \frac{1}{2} = 8 : 5$$

となる。

(3)

一般の自然数 n と、整数 $k = 0, 1, \dots, n$ に対し、

$$a = k \text{ となる確率 : } a_n(k) = {}_n C_k \left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

$$b = k \text{ となる確率 : } b_n(k) = {}_n C_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = {}_n C_k \frac{2^k}{3^n}$$

である。

(a)

$n = 1$ のとき、

$$a_1(k) = \frac{1}{2}, b_1(k) = \frac{2^k}{3} \quad (k = 0, 1)$$

となる。よって、 $a < b$ 、つまり $(a, b) = (0, 1)$ となる確率は

$$p = a_1(0) \cdot b_1(1) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

である。また、 $a > b$ 、つまり $(a, b) = (1, 0)$ となる確率は

$$q = a_1(1) \cdot b_1(0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

である。

(b)

$n = 2$ のとき、

$$a_2(k) = \frac{{}_2 C_k}{4}, b_2(k) = \frac{2^k \cdot {}_2 C_k}{9} \quad (k = 0, 1, 2)$$

となる。よって、 $a < b$ 、つまり $(a, b) = (0, 1), (0, 2), (1, 2)$ のいずれかとなる確率は

$$p = a_2(0) \{b_2(1) + b_2(2)\} + a_2(1) \cdot b_2(2)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{9} + \frac{4}{9} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{9}$$

$$= \frac{4}{9}$$

である。また、 $a > b$ 、つまり $(a, b) = (2, 1), (2, 0), (1, 0)$ のいずれかとなる確率は

$$q = a_2(2) \{b_2(1) + b_2(0)\} + a_2(1) \cdot b_2(0)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{9} \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9}$$

$$= \frac{7}{36}$$

である。

(c)

$n = 3$ のとき、

$$a_3(k) = \frac{{}_3 C_k}{8}, b_3(k) = \frac{2^k \cdot {}_3 C_k}{27} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

となる。よって、 $a < b$ 、つまり $(a, b) = (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 2), (1, 3), (2, 3)$ のいずれかとなる確率は、 $b_3(1) + b_3(2) + b_3(3) = 1 - b_3(0)$ であることに注意して、

$$p = a_3(0) \{1 - b_3(0)\} + a_3(1) \{b_3(2) + b_3(3)\} + a_3(2) \cdot b_3(3)$$

$$= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{1}{27} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{4}{9} + \frac{8}{27} \right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{8}{27}$$

$$= \frac{55}{108}$$

である。また、 $a > b$ 、つまり $(a, b) = (3, 0), (3, 1), (3, 2), (2, 0), (2, 1), (1, 0)$ のいずれかとなる確率は、 $b_3(0) + b_3(1) + b_3(2) = 1 - b_3(3)$ であることに注意して、

$$q = a_3(3) \{1 - b_3(3)\} + a_3(2) \{b_3(0) + b_3(1)\} + a_3(1) \cdot b_3(0)$$

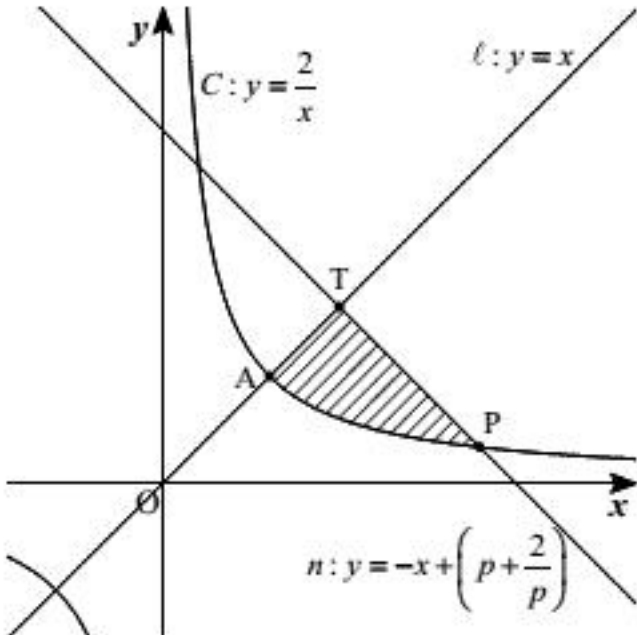
$$= \frac{1}{8} \left(1 - \frac{8}{27} \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{1}{27} + \frac{6}{27} \right) + \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{27}$$

$$= \frac{43}{216}$$

である。

2

xy 座標平面上において、与えられた曲線 $C: y = \frac{2}{x}$, 直線 $\ell: y = x$, 点 $A(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, 点 $T\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) (t > 2)$, 点 P を図示すると以下のようになる。また、点 T を通り直線 ℓ に直交する直線を n とする。



(1) 点 P の x 座標を p とすると、直線 n の式は

$$y = (-1)(x - p) + \frac{2}{p}$$

$$\therefore y = -x + \left(p + \frac{2}{p}\right)$$

となる。また、点 T は直線 ℓ と直線 n の交点であるから、2 直線の式を連立することで

$$-x + \left(p + \frac{2}{p}\right) = x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \left(p + \frac{2}{p}\right)$$

$$\therefore t = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(p + \frac{2}{p}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(p + \frac{2}{p}\right)$$

(2) 2 つの線分 AT, PT と曲線 C で囲まれる図形は、上図の斜線部のようになる。この図形を直線 ℓ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めるために、 xy 座標の点すべてを原点中心に -45° 回転してできた XY 座標平面上で考えることにする。まず、点 (x, y) を原点中心に -45° 回転したときに点 (X, Y) に移ったとすると

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ) \\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \\ -\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}} \\ \frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad \dots \textcircled{2}$$

なる関係式を満たすことに注意する。ここで、点 A, T, P を原点中心に -45° 回転させたときに移る点をそれぞれ A', T', P' とすると、 $\textcircled{1}$ より

$$A'(2, 0), T'(t, 0), P'\left(\frac{\sqrt{2}}{2} \left(p + \frac{2}{p}\right), \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-p + \frac{2}{p}\right)\right)$$

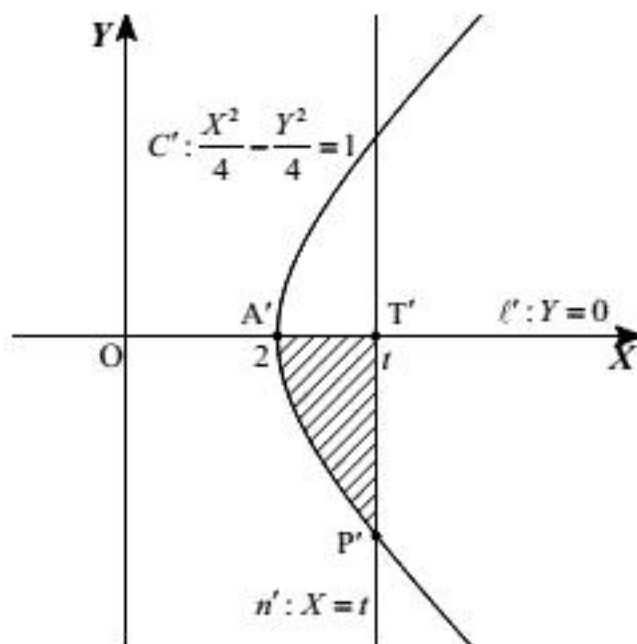
となり、また、曲線 C を原点中心に -45° 回転させたときにできる曲線 C' の方程式は、 $\textcircled{2}$ より

$$xy = 2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{X}{\sqrt{2}} - \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) \left(\frac{X}{\sqrt{2}} + \frac{Y}{\sqrt{2}}\right) = 2$$

$$\therefore \frac{X^2}{4} - \frac{Y^2}{4} = 1$$

となる。さらに、直線 ℓ, n を原点中心に -45° 回転させたときにできる直線 ℓ', n' は、それぞれ直線 $A'T', P'T'$ と一致するから、結局、以下の図の斜線部を X 軸のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積を求めればよいことになる。



したがって、求める体積は

$$V(t) = \pi \int_2^t Y^2 dX$$

$$= \pi \int_2^t (X^2 - 4) dX$$

$$= \pi \left[\frac{X^3}{3} - 4X \right]_2^t$$

$$= \pi \left\{ \left(\frac{t^3}{3} - 4t \right) - \left(\frac{8}{3} - 8 \right) \right\}$$

$$= \frac{\pi}{3} (t^3 - 12t + 16)$$

$$= \frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+4)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad V(t) = \frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+4)$$

(3) (2) と同様に考えると、三角形 APT を直線 ℓ のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積は、三角形 $A'T'P'$ を直線 ℓ' のまわりに 1 回転して得られる回転体の体積と一致し、さらにこの回転体は円錐であるから、(2) の図より

$$W(t) = \frac{\pi}{3} \left\{ 0 - \frac{\sqrt{2}}{2} \left(-p + \frac{2}{p} \right) \right\}^2 (t-2)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(p - \frac{2}{p} \right) \right\}^2 (t-2) \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。さらに、(1) より

$$\left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(p - \frac{2}{p} \right) \right\}^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(p^2 - 4 + \frac{4}{p^2} \right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \left(p^2 + 4 + \frac{4}{p^2} \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \cdot (-8)$$

$$= \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} \left(p + \frac{2}{p} \right) \right\}^2 - 4$$

$$= t^2 - 4$$

であるから、 $\textcircled{3}$ は

$$W(t) = \frac{\pi}{3} (t^2 - 4) (t-2)$$

$$= \frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+2)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad W(t) = \frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+2)$$

(4) (2), (3) の結果より、求める極限値は

$$\lim_{t \rightarrow 2} \frac{W(t)}{V(t)} = \lim_{t \rightarrow 2} \frac{\frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+2)}{\frac{\pi}{3} (t-2)^2 (t+4)}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{t+2}{t+4}$$

$$= \frac{4}{6}$$

$$= \frac{2}{3}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}$$

3

(1)

$$P = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a+1 & a \end{pmatrix} \text{より}$$

$$\det P = a^2 - (-a)(-a+1) \\ = a$$

である。条件より $a > 0$ だから $\det P \neq 0$ であり、行列 P の逆行列が存在し

$$P^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & a \\ a-1 & a \end{pmatrix}$$

が求められる。

$$(\text{答}) \quad P^{-1} = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} a & a \\ a-1 & a \end{pmatrix}$$

(2)

1 次変換 f より

$$\begin{cases} A \begin{pmatrix} a \\ -a+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ \frac{3-3a}{a} \end{pmatrix} \\ A \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix} \end{cases} \\ \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} a & -a \\ -a+1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{3-3a}{a} & 4 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow AP = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{3-3a}{a} & 4 \end{pmatrix}$$

が得られる。また、条件より $AP = PB$ だから

$$PB = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ \frac{3-3a}{a} & 4 \end{pmatrix}$$

である。この式の両辺に左から P^{-1} をかけて

$$B = \frac{1}{a} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

となるから

$$B^n = \frac{1}{a^n} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

が導かれる。

$$(\text{答}) \quad B^n = \frac{1}{a^n} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

(3)

$AP = PB$ の両辺に右から P^{-1} をかけると

$$AP = PB \\ \Leftrightarrow A = PB P^{-1}$$

が得られる。これを n 乗すると

$$A^n = PB P^{-1} PB \cdots B P^{-1} \\ = PBEB \cdots B P^{-1} \\ = PB^n P^{-1}$$

となる。ここで $a = 4$ より

$$P = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \\ P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ B^n = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix}$$

であるから

$$A^n = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 3^n & 0 \\ 0 & 4^n \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 4 \cdot 3^n - 4^n \cdot 3 & 4 \cdot 3^n - 4^{n+1} \\ -3^{n+1} + 3 \cdot 4^n & -3^{n+1} + 4^{n+1} \end{pmatrix}$$

が得られる。問題文より

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ = \frac{1}{4^n} \begin{pmatrix} 8 \cdot 3^n - 7 \cdot 4^n \\ -6 \cdot 3^n + 7 \cdot 4^n \end{pmatrix}$$

とわかる。従って

$$x_n - y_n = \frac{14 \cdot 3^n - 14 \cdot 4^n}{4^n} \\ = 14 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n - 14$$

より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = -14$$

である。

$$(\text{答}) \quad x_n - y_n = 14 \cdot \left(\frac{3}{4} \right)^n - 14, \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = -14$$