

1

【解答】

|     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|--|--|
| (1) | <table border="1"> <tr> <td>ア</td><td>イ</td><td>ウ</td><td>エ</td><td>オ</td><td>カ</td><td>キ</td><td>ク</td><td>ケ</td> </tr> <tr> <td>4</td><td>3</td><td>7</td><td>8</td><td>7</td><td>2</td><td>3</td><td>7</td><td>2</td> </tr> </table>                                                                                                                                                                                                                                                            | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ | 4 | 3 | 7 | 8 | 7 | 2 | 3 | 7 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| ア   | イ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | ウ | エ | オ | カ | キ | ク | ケ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| 4   | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 7 | 8 | 7 | 2 | 3 | 7 | 2 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| (2) | <table border="1"> <tr> <td>コ</td><td>サ</td><td>シ</td><td>ス</td><td>セ</td><td>ソ</td><td>タ</td><td>チ</td><td>ツ</td><td>テ</td> </tr> <tr> <td>4</td><td>6</td><td>6</td><td>3</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td> </tr> <tr> <td>ト</td><td>ナ</td><td>ニ</td><td>ヌ</td><td>ネ</td><td>ノ</td><td>ハ</td><td>ヒ</td><td></td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td>3</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td><td>8</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td></td><td></td> </tr> </table>   | コ | サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ | 4 | 6 | 6 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ | ヒ |   |  |  | 3 | 2 | 1 | 2 | 8 | 1 | 1 | 0 |   |  |  |
|     | コ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | サ | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ | テ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 6 | 6 | 3 | 4 | 3 | 2 | 2 | 3 | 4 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| ト   | ナ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ | ヒ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     | 3                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2 | 1 | 2 | 8 | 1 | 1 | 0 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| (3) | <table border="1"> <tr> <td>フ</td><td>ヘ</td><td>ホ</td><td>マ</td><td>ミ</td><td>ム</td><td>メ</td><td>モ</td><td>ヤ</td><td>ユ</td> </tr> <tr> <td>4</td><td>5</td><td>1</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td>2</td><td>9</td> </tr> <tr> <td>ヨ</td><td>ラ</td><td>リ</td><td>ル</td><td>レ</td><td>ロ</td><td>ワ</td><td>ヲ</td><td>ン</td><td></td> </tr> <tr> <td></td><td>5</td><td>2</td><td>4</td><td>8</td><td>1</td><td>6</td><td>2</td><td>1</td><td>5</td><td></td> </tr> </table> | フ | ヘ | ホ | マ | ミ | ム | メ | モ | ヤ | ユ | 4 | 5 | 1 | 8 | 5 | 2 | 1 | 5 | 2 | 9 | ヨ | ラ | リ | ル | レ | ロ | ワ | ヲ | ン |  |  | 5 | 2 | 4 | 8 | 1 | 6 | 2 | 1 | 5 |  |  |
|     | フ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | ヘ | ホ | マ | ミ | ム | メ | モ | ヤ | ユ |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     | 4                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 5 | 1 | 8 | 5 | 2 | 1 | 5 | 2 | 9 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
| ヨ   | ラ                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | リ | ル | レ | ロ | ワ | ヲ | ン |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |
|     | 5                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 2 | 4 | 8 | 1 | 6 | 2 | 1 | 5 |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |   |   |   |   |   |   |   |   |   |  |  |

【解説】

(1)

$$S_n = -\frac{3}{4}a_n + 2n + 5$$

・・・①

②  $a_n = 4n - 3$  となることを示す。

【解説】

(1)

$$S_n = -\frac{3}{4}a_n + 2n + 5 \qquad \cdots \textcircled{1}$$

①に $n=1$ を代入すると、 $S_1=a_1$ であるから、

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{3}{4}a_1 + 2 + 5 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{4}a_1 &= 7 \\ \therefore a_1 &= 4 \end{aligned}$$

と求まる。また、①より、

$$S_{n+1} = -\frac{3}{4}a_{n+1} + 2(n+1) + 5 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

であるから、②-①より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= -\frac{3}{4}a_{n+1} + \frac{3}{4}a_n + 2 \\ \Leftrightarrow \frac{7}{4}a_{n+1} &= \frac{3}{4}a_n + 2 \\ \therefore a_{n+1} &= \frac{3}{7}a_n + \frac{8}{7} \quad (n=1, 2, 3, \cdots) \end{aligned}$$

が成り立つ。上式より、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{3}{7}a_n + \frac{8}{7} \\ \Leftrightarrow a_{n+1} - 2 &= \frac{3}{7}(a_n - 2) \end{aligned}$$

と変形できるので、 $\{a_n - 2\}$ は初項 $a_1 - 2 = 2$ 、公比 $\frac{3}{7}$ の等比数列である。よって、

$$\begin{aligned} a_n - 2 &= 2 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} \\ \therefore a_n &= 2 \times \left(\frac{3}{7}\right)^{n-1} + 2 \end{aligned}$$

と求まる。

(2)

$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 6x$$

であるから、 $\ell_a$ の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= f'(a)(x-a) + f(a) \\ &= (4a^3 + 6a^2 - 6a)(x-a) + a^4 + 2a^3 - 3a^2 \\ &= (4a^3 + 6a^2 - 6a)x - 3a^4 - 4a^3 + 3a^2 \end{aligned}$$

と表せる。ここで、曲線 $C$ と接線 $\ell_a$ の共有点の $x$ 座標について、 $y=f(x)$ と上式から $y$ を消去することにより、

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 3x^2 &= (4a^3 + 6a^2 - 6a)x - 3a^4 - 4a^3 + 3a^2 \\ \Leftrightarrow x^4 + 2x^3 - 3x^2 + (-4a^3 - 6a^2 + 6a)x + 3a^4 + 4a^3 - 3a^2 &= 0 \end{aligned}$$

を得る。上式の左辺は、

$$\begin{aligned} x^4 + 2x^3 - 3x^2 + (-4a^3 - 6a^2 + 6a)x + 3a^4 + 4a^3 - 3a^2 \\ = (x-a)^2 \{x^2 + (2a+2)x + (3a^2 + 4a-3)\} \end{aligned}$$

と変形できるので、曲線 $C$ と接線 $\ell_a$ の共有点の $x$ 座標を $t$ とおくとき、 $t$ は

$$(t-a)^2 \{t^2 + (2a+2)t + (3a^2 + 4a-3)\} = 0$$

を満たす。 $t^2 + (2a+2)t + (3a^2 + 4a-3) = 0$ が重解を持つとき、上式の判別式を $D$ とすると、

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (a+1)^2 - (3a^2 + 4a-3) = 0 \\ \Leftrightarrow -2a^2 - 2a + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^2 + a - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a+2)(a-1) &= 0 \\ \therefore a &= -2, 1 \end{aligned}$$

と求まる。 $a=1$ のとき、

$$\begin{aligned} t^2 + (2a+2)t + (3a^2 + 4a-3) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 + 4t + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (t+2)^2 &= 0 \\ \therefore t &= -2 \end{aligned}$$

となるので、 $\ell_a$ は点 $(a, f(a))$ 以外に $x$ 座標が $-2$ となる点においても曲線 $C$ に接する。また、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x^3 + 6x^2 - 6x \\ &= 2x(2x^2 + 3x - 3) \\ &= 2x \left( x - \frac{-3-\sqrt{33}}{4} \right) \left( x - \frac{-3+\sqrt{33}}{4} \right) \end{aligned}$$

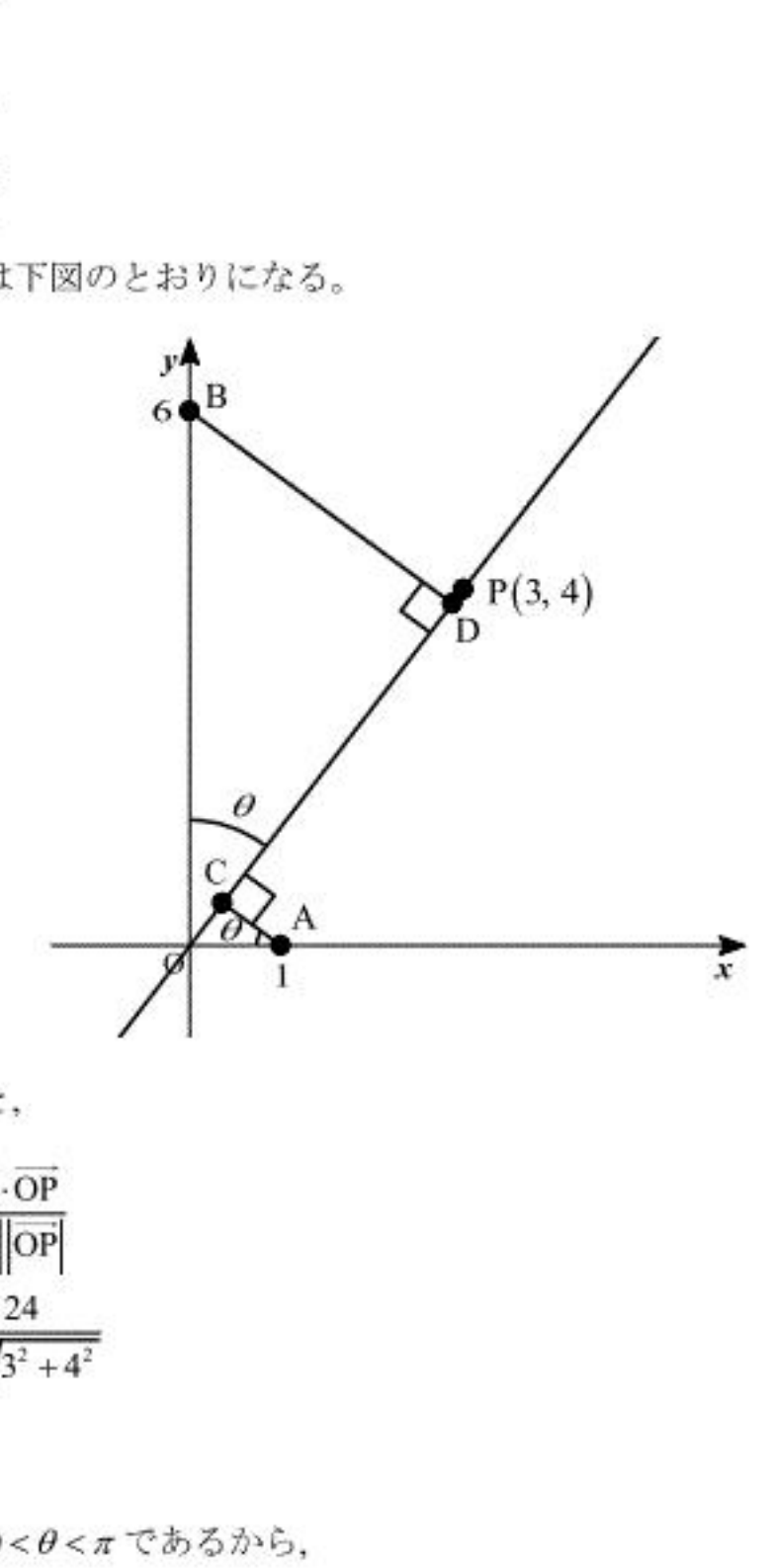
と変形できる。したがって、 $f(x)$ の増減表は下記の通りである。

|         |            |                          |            |    |            |                          |            |
|---------|------------|--------------------------|------------|----|------------|--------------------------|------------|
| $x$     | ...        | $\frac{-3-\sqrt{33}}{4}$ | ...        | 0  | ...        | $\frac{-3+\sqrt{33}}{4}$ | ...        |
| $f'(x)$ | -          | 0                        | +          | 0  | -          | 0                        | +          |
| $f(x)$  | $\searrow$ | 極小                       | $\nearrow$ | 極大 | $\searrow$ | 極小                       | $\nearrow$ |

また、 $a=1$ のとき、

$$\ell_a : y = 4x - 4$$

であるから、このとき、 $C$ と $\ell_a$ で囲まれた部分の面積は下図の斜線部である。



したがって、求める面積を $S$ とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^1 \{(x^4 + 2x^3 - 3x^2) - (4x - 4)\} dx \\ &= \int_{-2}^1 (x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 4) dx \\ &= \left[ \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 2x^2 + 4x \right]_{-2}^1 \\ &= \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{2} - 1 - 2 + 4 \right) - \left( -\frac{32}{5} + 8 + 8 - 8 - 8 \right) \\ &= \frac{81}{10} \end{aligned}$$

と求まる。

(3)(a)

仮に点 $C, D$ が第3象限にあるとすると、 $\triangle OAC$ と $\triangle ODB$ がともに鈍角三角形となるので不適である。したがって、点 $C, D$ はともに第1象限にある。 $\triangle OBD$ が直角三角形のとき、

$$\angle OBD = \frac{\pi}{2} \text{ または } \angle ODB = \frac{\pi}{2}$$

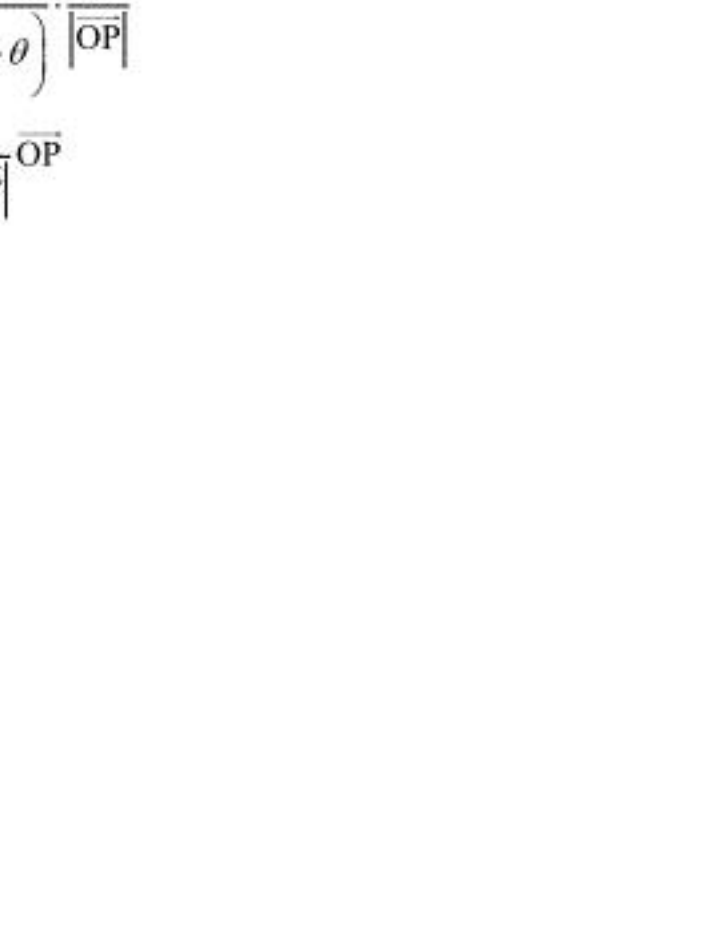
である。 $\angle OBD = \frac{\pi}{2}$ のとき、線分 $AC$ と線分 $BD$ が平行であるという条件を満たさないので、

$$\angle ODB = \frac{\pi}{2}$$

である。このとき、

$$\angle OCA = \frac{\pi}{2}$$

となり、位置関係は下図のとおりになる。



$\angle BOP = \theta$ とおくと、

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OB}| |\overrightarrow{OP}|} \\ &= \frac{24}{6 \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

と求まる。また、 $0 < \theta < \pi$ であるから、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{cases} \angle BOD = \theta \\ \angle AOC = \frac{\pi}{2} - \theta \end{cases}$$

であるから、

$$\begin{aligned} BD &= OB \cdot \sin \theta \\ &= 6 \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{18}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} AC &= 1 \cdot \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \cos \theta \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} OC &= 1 \cdot \cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OD &= 6 \cdot \cos \theta \\ &= \frac{24}{5} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} CD &= \frac{24}{5} - \frac{3}{5} \\ &= \frac{21}{5} \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

条件より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OQ} &= \frac{t}{\cos \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right)} \cdot \frac{\overrightarrow{OP}}{|\overrightarrow{OP}|} \\ &= \frac{t}{\sin \theta |\overrightarrow{OP}|} \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{t}{3} \overrightarrow{OP} \end{aligned}$$

であるから、

$$Q \left( t, \frac{4}{3}t \right)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 \cdot \frac{4}{3}t \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{2}{3}t \\ S_2 &= 6 \cdot t \cdot \frac{1}{2} \\ &= 3t \end{aligned}$$

と計算できるので、

$$S_1 : S_2 = \frac{2}{3}t : 3t = 2 : 9$$

と求まる。また、

$$\begin{aligned} AQ^2 &= (t-1)^2 + \left( \frac{4}{3}t - 0 \right)^2 \\ &= \frac{25}{9}t^2 - 2t + 1 \\ BQ^2 &= (t-0)^2 + \left( \frac{4}{3}t - 6 \right)^2 \\ &= \frac{25}{9}t^2 - 16t + 36 \end{aligned}$$

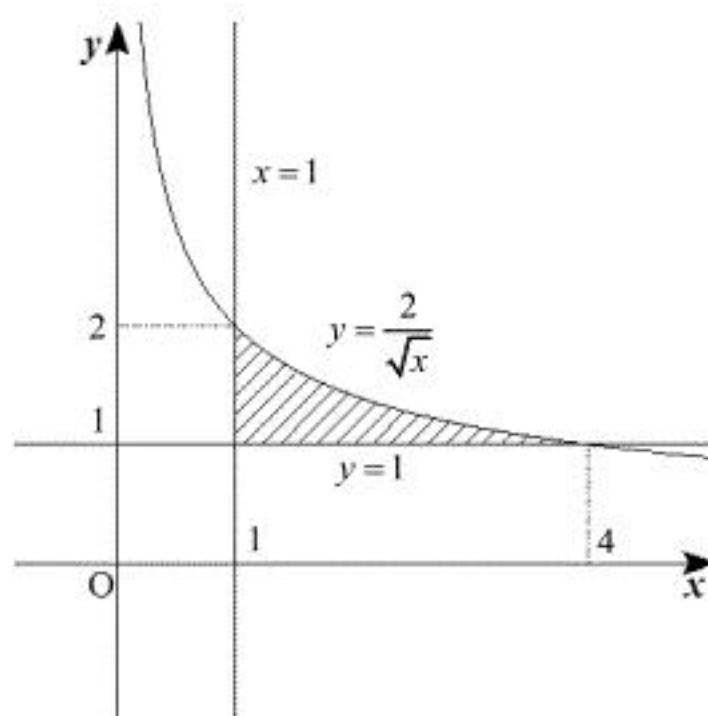
であるから、

$$\begin{aligned} f(t) &= \sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 2t + 1} - \sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 16t + 36} \\ &= \frac{\left( \frac{25}{9}t^2 - 2t + 1 \right) - \left( \frac{25}{9}t^2 - 16t + 36 \right)}{\sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 2t + 1} + \sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 16t + 36}} \\ &= \frac{14t - 35}{\sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 2t + 1} + \sqrt{\frac{25}{9}t^2 - 16t + 36}} \\ &= \frac{14 - \frac{35}{t}}{\sqrt{\frac{25}{9} - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^2}} + \sqrt{\frac{25}{9} - \frac{16}{t} + \frac{36}{t^2}}} \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) &= \frac{14}{\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{25}{9}}} \\ &= \frac{21}{5} \end{aligned}$$

と求まる。



(1)

求める体積は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_1^4 y^2 dx - \pi \cdot 1^2 \cdot (4-1) \\ &= 4\pi [\log x]_1^4 - 3\pi \\ &= (8\log 2 - 3)\pi \end{aligned}$$

となる。

(答)  $(8\log 2 - 3)\pi$

(2)

$W$  は領域  $D$  を  $x$  方向に  $-r$  平行移動したものを、 $y$  軸の周りに回転させて得られる立体の体積に等しい。よって

$$W = \pi \int_1^2 (x-r)^2 dy - \pi \cdot (1-r)^2 \cdot (2-1)$$

となるが、 $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$  より

$$x = \frac{4}{y^2}$$

であるから

$$\begin{aligned} W &= \pi \int_1^2 \left( \frac{4}{y^2} - r \right)^2 dy - \pi \cdot (1-r)^2 \cdot (2-1) \\ &= \pi \left[ -\frac{16}{3y^3} + \frac{8r}{y} + r^2 y \right]_1^2 - \pi (r^2 - 2r + 1) \\ &= \left( -2r + \frac{11}{3} \right) \pi \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\left( -2r + \frac{11}{3} \right) \pi$

(3)

(1)より

$$\begin{aligned} V &= W \\ \Leftrightarrow (8\log 2 - 3)\pi &= \left( -2r + \frac{11}{3} \right) \pi \\ \therefore r &= \frac{10}{3} - 4\log 2 \end{aligned}$$

となる。

(答)  $r = \frac{10}{3} - 4\log 2$

(4)

$e = 2.718\cdots$  より

$$e^2 = 7.388\cdots < 8$$

となるから

$$\begin{aligned} e^2 &< 8 \\ \Leftrightarrow e^{\frac{2}{3}} &< 2 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} &< \log 2 \end{aligned}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} \frac{10}{3} - 4\log 2 &< \frac{10}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

を得る。よって(3)で求めた  $r$  は  $\frac{2}{3}$  より小さい。

(答)  $r < \frac{2}{3}$

3

(1)

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= (\sqrt{5} \cos \theta, 2 \sin \theta, -\sin \theta) - (0, 3, 6) \\ &= (\sqrt{5} \cos \theta, 2 \sin \theta - 3, -\sin \theta - 6)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}|\overline{AP}|^2 &= 5 \cos^2 \theta + 4 \sin^2 \theta + 9 - 12 \sin \theta + \sin^2 \theta + 36 + 12 \sin \theta \\ &= 50 \\ \therefore |\overline{AP}| &= 5\sqrt{2}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad |\overline{AP}| = 5\sqrt{2}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= (a, b, 0) - (0, 3, 6) \\ &= (a, b - 3, -6)\end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned}\overline{AQ} &= t \overline{AP} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = t\sqrt{5} \cos \theta \\ b - 3 = t(2 \sin \theta - 3) \\ -6 = -t(\sin \theta + 6) \end{cases}\end{aligned}$$

となる。 $-1 \leq \sin \theta \leq 1$  より  $\sin \theta + 6 \neq 0$  であることに注意して、最後の条件式から

$$t = \frac{6}{\sin \theta + 6}$$

となる。また、 $t$  の値を 1, 2 番目の条件式に代入して

$$\begin{aligned}a &= \frac{6\sqrt{5} \cos \theta}{\sin \theta + 6} \\ b &= 3 + \frac{6(2 \sin \theta - 3)}{\sin \theta + 6} \\ &= \frac{15 \sin \theta}{\sin \theta + 6}\end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{6}{\sin \theta + 6}, a = \frac{6\sqrt{5} \cos \theta}{\sin \theta + 6}, b = \frac{15 \sin \theta}{\sin \theta + 6}$$

(3)

$a$  が  $\theta$  の関数であることを強調して、 $a(\theta)$  と書く。 $a(\theta)$  を微分して

$$\begin{aligned}a'(\theta) &= \frac{-6\sqrt{5} \sin \theta (\sin \theta + 6) - 6\sqrt{5} \cos \theta \cdot \cos \theta}{(\sin \theta + 6)^2} \\ &= \frac{-6\sqrt{5} (1 + 6 \sin \theta)}{(\sin \theta + 6)^2}\end{aligned}$$

を得る。よって、 $a'(\theta) = 0$  となるのは

$$\begin{aligned}1 + 6 \sin \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin \theta &= -\frac{1}{6}\end{aligned}$$

となるときである。 $0 \leq \theta < 2\pi$  より、 $\sin \theta = -\frac{1}{6}$  を満たす  $\theta$  の値は 2 つ存在するから、それを

$\alpha, \beta$  ( $\alpha < \beta$ ) とおくと、

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \sin \beta = -\frac{1}{6} \\ \cos \alpha &= -\frac{\sqrt{35}}{6}, \cos \beta = \frac{\sqrt{35}}{6}\end{aligned}$$

である。そこで、増減表は以下のようになる。

| $\theta$     | 0 | ...        | $\alpha$ | ...        | $\beta$ | ...        | $2\pi$ |
|--------------|---|------------|----------|------------|---------|------------|--------|
| $a'(\theta)$ |   | -          | 0        | +          | 0       | -          |        |
| $a(\theta)$  |   | $\searrow$ |          | $\nearrow$ |         | $\searrow$ |        |

したがって、 $a(\theta)$  が最大値を取るときの  $\theta$  の値としてあり得るのは  $\theta = 0, \beta$  である。ここで、

$$\begin{aligned}a(0) &= \frac{6\sqrt{5} \cdot 1}{6 + 0} \\ &= \sqrt{5} \\ a(\beta) &= \frac{6\sqrt{5} \cos \beta}{\sin \beta + 6} \\ &= \frac{6\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{35}}{6}}{-\frac{1}{6} + 6} \\ &= \frac{6\sqrt{7}}{7}\end{aligned}$$

であり,

$$\begin{aligned}\left(\frac{6\sqrt{7}}{7}\right)^2 - (\sqrt{5})^2 &= \frac{36}{7} - 5 \\ &= \frac{1}{7} > 0\end{aligned}$$

より,

$$\frac{6\sqrt{7}}{7} > \sqrt{5}$$

である。よって、 $0 \leq \theta < 2\pi$  における  $a(\theta)$  の最大値は  $\frac{6\sqrt{7}}{7}$  とわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{6\sqrt{7}}{7}$$

(4)

$$\begin{aligned}\overline{PQ} &= \left( \frac{6\sqrt{5} \cos \theta}{\sin \theta + 6}, \frac{15 \sin \theta}{\sin \theta + 6}, 0 \right) - (\sqrt{5} \cos \theta, 2 \sin \theta, -\sin \theta) \\ &= \left( -\frac{\sqrt{5} \sin \theta \cos \theta}{\sin \theta + 6}, \frac{3 \sin \theta - 2 \sin^2 \theta}{\sin \theta + 6}, \sin \theta \right) \\ &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 6} (-\sqrt{5} \cos \theta, 3 - 2 \sin \theta, \sin \theta + 6) \\ &= -\frac{\sin \theta}{\sin \theta + 6} \overline{AP}\end{aligned}$$

となるから、 $0 < \theta < \pi$  より  $\frac{\sin \theta}{\sin \theta + 6} > 0$  であることに注意して、(1) より

$$\begin{aligned}d &= |\overline{PQ}| \\ &= \frac{\sin \theta}{\sin \theta + 6} |\overline{AP}| \\ &= \frac{5\sqrt{2} \sin \theta}{\sin \theta + 6}\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\frac{d}{b} &= \frac{\frac{5\sqrt{2} \sin \theta}{\sin \theta + 6}}{\frac{15 \sin \theta}{\sin \theta + 6}} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad d = \frac{5\sqrt{2} \sin \theta}{\sin \theta + 6}, \frac{d}{b} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$