

【解答】

ア	4	イ	3	ウ	3	エ	2	オ	3
カ	9	キ	9	ク	4	ケ	2	コ	7
サ	4	シ	2	ス	3	セ	6	ソ	4
タ	9	チ	6	ツ	3	テ	4	ト	9
ナ	2	ニ	4	ヌ	9	ネ	2	ノ	7
ハ	4	ヒ	3	フ	2	ヘ	3	ホ	0
マ	1	ミ	0	ム	4	メ	0	モ	2
ヤ	5								

【解説】

(1)

絶対値を外すと

$$|t^2 - x| = \begin{cases} t^2 - x & (t < -\sqrt{x}, \sqrt{x} < t) \\ -t^2 + x & (-\sqrt{x} \leq t \leq \sqrt{x}) \end{cases}$$

となる。従って、 t の範囲が $0 \leq t \leq 3$ で、 x の範囲が $0 \leq x \leq 9$ であることを考えると $f(x)$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^3 |t^2 - x| dx \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} (-t^2 + x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^3 (t^2 - x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}t^3 + xt \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[\frac{1}{3}t^3 - xt \right]_{\frac{1}{2}}^3 \\ &= \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - 3x + 9 \end{aligned}$$

である。これを x で微分すると

$$f'(x) = 2x^{\frac{1}{2}} - 3$$

なので、増減表を書くと下のようになる。

x	0	...	$\frac{9}{4}$	...	9
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗	

従って、 $f(x)$ は $x = \frac{9}{4}$ において最小値 $\frac{27}{4}$ をとる。

(2)

倍角公式を利用して $f(x)$ を変形すると

$$\begin{aligned} f(x) &= 3 + 6\cos^2 x + 2a\sin 2x \\ &= 2a\sin 2x + 6\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) + 3 \\ &= 2a\sin 2x + 3\cos 2x + 6 \end{aligned}$$

となる。また、三角関数の合成を行うと

$$f(x) = \sqrt{4a^2 + 9} \sin(2x + \theta) + 6$$

となる。ただし、この θ は

$$\sin \theta = \frac{3}{\sqrt{4a^2 + 9}}, \cos \theta = \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + 9}}$$

を満たす。

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{4a^2 + 9} \sin(2x + \theta) + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin(2x + \theta) &= \frac{-6}{\sqrt{4a^2 + 9}} \end{aligned}$$

なので、 $f(x) = 0$ となる x が存在する条件は、

$$\begin{aligned} \left| \frac{-6}{\sqrt{4a^2 + 9}} \right| &\leq 1 \\ \Leftrightarrow a^2 &\geq \frac{27}{4} \end{aligned}$$

である。

(3)

(a)

$f(x)$ を因数分解すると

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^5 + 2x^4 + x^3}{27} \\ &= \frac{x^3(x^2 + 2x + 1)}{3^3} \\ &= \frac{x^3(x+1)^2}{3^3} \end{aligned}$$

となる。分子が 3^3 の倍数となれば良い。ここで a と $a+1$ が同じ a でともに3の倍数になることはない。従って以下のように場合分けができる。

[1] a^3 が27の倍数になるとき

つまり、 a が3の倍数になるときである。 a は2桁の自然数なので、 $12 = 3 \times 4$ から $99 = 3 \times 33$ の $33 - 4 + 1 = 30$ 個である。

[2] $(a+1)^2$ が27の倍数になるとき

つまり、 $a+1$ が9の倍数になるときである。 a は2桁の自然数なので、 $17 = 9 \times 2 - 1$ から $98 = 9 \times 11 - 1$ の $11 - 2 + 1 = 10$ 個である。

以上[1], [2]より合計40個である。

(b)

$g(x)$ を因数分解すると

$$g(x) = \frac{x^2(x+1)(x-1)}{5^2}$$

となる。分子が 5^2 の倍数となれば良い。ここで $a, a+1, a-1$ が同じ a でともに5の倍数になることはない。従って以下のように場合分けができる。

[1] a^2 が 5^2 の倍数になるとき

つまり、 a が5の倍数になるときである。 $10 = 5 \times 2$ から $95 = 5 \times 19$ の $19 - 2 + 1 = 18$ 個である。

[2] $a+1$ が 5^2 の倍数になるとき

$24 = 25 \times 1 - 1$ から $99 = 25 \times 4 - 1$ の $4 - 1 + 1 = 4$ 個である。

[3] $a-1$ が 5^2 の倍数になるとき

$26 = 25 \times 1 + 1$ から $76 = 25 \times 3 + 1$ の $3 - 1 + 1 = 3$ 個である。

以上[1], [2], [3]より合計25個である。

(1)

$f(x), g(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{a}{ax+1} \\ g'(x) &= 2x \end{aligned}$$

である。点 P では共通の接線を持つので、傾きが等しい。従って

$$\begin{aligned} f'(t) &= g'(t) \\ \Leftrightarrow \frac{a}{at+1} &= 2t \\ \Leftrightarrow 2at^2 + 2t - a &= 0 \quad \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。解の公式より t は

$$t = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2a^2}}{2a}$$

となるが $t \geq 0$ より

$$t = \frac{-1 + \sqrt{1+2a^2}}{2a}$$

と表せる。

$$\text{(答)} \quad t = \frac{-1 + \sqrt{1+2a^2}}{2a}$$

(2)

①に $t = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a + 1 - a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$

である。また点 P は C_1 と C_2 の交点なので

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\right) &= g\left(\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{2}a + 1\right) &= \frac{1}{4} + b \\ \Leftrightarrow b &= \log 2 - \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を得る。点 P の座標は $P\left(\frac{1}{2}, \log 2\right)$ なので直線 l の方程式は

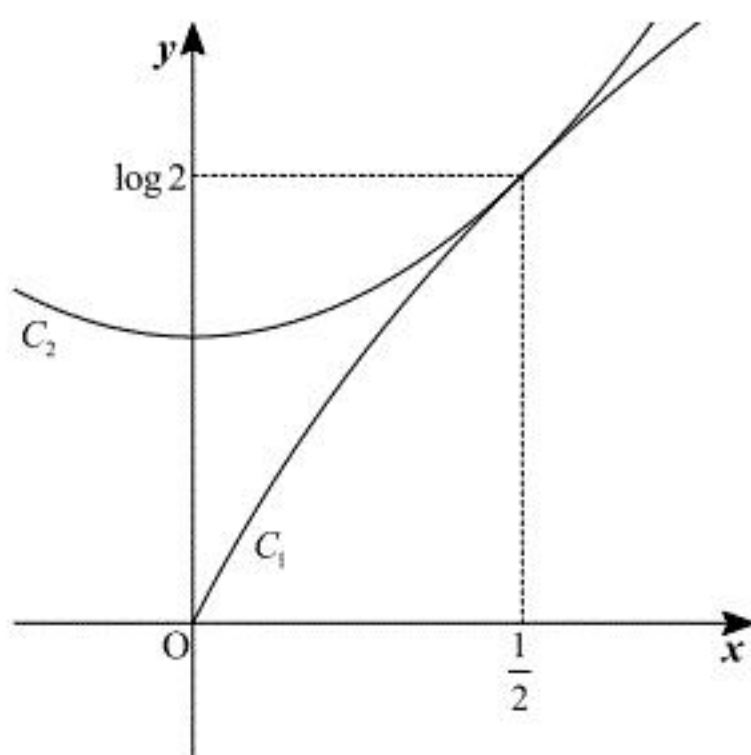
$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \log 2 \\ \Leftrightarrow y &= x + \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} a &= 2 \\ \text{(答)} \quad b &= \log 2 - \frac{1}{4} \\ l: y &= x + \log 2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(3)

C_1, C_2 をグラフ上に表すと下のようになる。



求める面積を S とすると

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}} \left\{ \left(x^2 + \log 2 - \frac{1}{4} \right) - \log(2x+1) \right\} dx$$

と立式できる。ここで

$$\begin{aligned} \int \log(2x+1) dx &= \int \frac{1}{2} (2x+1)' \log(2x+1) dx \\ &= \frac{1}{2} (2x+1) \log(2x+1) - \int 1 dx \\ &= \frac{1}{2} (2x+1) \log(2x+1) - x + C \end{aligned}$$

である。ただし C は積分定数である。従って S は

$$\begin{aligned} S &= \left[\frac{1}{3} x^3 + \left(\log 2 - \frac{1}{4} \right) x - \frac{1}{2} (2x+1) \log(2x+1) + x \right]_0^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \log 2 \end{aligned}$$

である。

$$\text{(答)} \quad \frac{5}{12} - \frac{1}{2} \log 2$$

(1)

 A^2 を計算すると

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & a \\ 3 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 16+3a & 4a+ab \\ 12+3b & 3a+b^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

である。これと $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ を比較すると

$$\begin{aligned} a &= -5 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \begin{aligned} a &= -5 \\ b &= -4 \end{aligned}$$

(2)

 A^n を考える。 $A^2 = E$ なので、 k を自然数として A^{2k} となるとき

$$\begin{aligned} A^{2k} &= (A^2)^k \\ &= E^k \\ &= E \end{aligned}$$

である。また A^{2k-1} のとき

$$\begin{aligned} A^{2k-1} &= (A^2)^{k-1} A \\ &= A \end{aligned}$$

である。従って

$$\begin{aligned} A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{101} &= 51A + 50E \\ &= \begin{pmatrix} 254 & -255 \\ 123 & -204 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{101} = \begin{pmatrix} 254 & -255 \\ 123 & -204 \end{pmatrix}$$

(3)

 $P_n(x_n, y_n)$ を $P_{n-1}(x_{n-1}, y_{n-1})$ で表すと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left(f(P_{n-1}) + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

となる。これを用いて $P_{2n}(x_{2n}, y_{2n})$ を表すと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_{2n} \\ y_{2n} \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \left(A \begin{pmatrix} x_{2n-1} \\ y_{2n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left[A \left\{ \frac{1}{2} \left(A \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \right\} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \\ &= \frac{1}{4} A^2 \begin{pmatrix} x_{2n-2} \\ y_{2n-2} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} A \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} x_{2n-2} + \frac{21}{4} \\ \frac{1}{4} y_{2n-2} + \frac{9}{4} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

が得られる。従って

$$\begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{4} x_{2n-2} + \frac{21}{4} \\ y_{2n} &= \frac{1}{4} y_{2n-2} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

が得られる。

$$\text{(答)} \quad \begin{aligned} x_{2n} &= \frac{1}{4} x_{2n-2} + \frac{21}{4} \\ y_{2n} &= \frac{1}{4} y_{2n-2} + \frac{9}{4} \end{aligned}$$

(4)

(3) の x_{2n} と x_{2n-2} の関係式を変形すると

$$x_{2n} - 7 = \frac{1}{4} (x_{2n-2} - 7)$$

となる。これより

$$\begin{aligned} x_{2n} - 7 &= \frac{1}{4} (x_{2n-2} - 7) \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{4} (x_{2n-4} - 7) \right\} \\ &= \left(\frac{1}{4} \right)^n (x_0 - 7) \\ &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} \\ \Leftrightarrow x_{2n} &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + 7 \end{aligned}$$

とわかる。また、 $n \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = 7$$

となる。 y_{2n} も同様にして

$$\begin{aligned} y_{2n} - 3 &= \frac{1}{4} (y_{2n-2} - 3) \\ &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} \\ \Leftrightarrow y_{2n} &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + 3 \end{aligned}$$

とわかり、極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} = 3$$

となる。

$$\begin{aligned} x_{2n} &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + 7 \\ \text{(答)} \quad y_{2n} &= -3 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{2n-1} + 3 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} &= 7 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_{2n} &= 3 \end{aligned}$$