

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	
2	2	4	1	4	7	0	9	
ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
2	7	5	0	3	2	7	0	3

〔解説〕

(1)

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

行列 $B^{-1}A$ は、 $A^{-1}B$ の逆行列であるから

$$\begin{aligned} B^{-1}A &= \frac{1}{\begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{6} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} A^2 &= AB \cdot B^{-1}A \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & -7 \\ 0 & 9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

(3)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、 $A^2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc+d^2 \end{pmatrix}$ である。これと(2)より、連立方程式

$$\begin{cases} a^2+bc=4 \\ b(a+d)=-7 \\ c(a+d)=0 \\ bc+d^2=9 \end{cases}$$

を得る。これを解くと

$$\begin{aligned} a &= \pm 2, b = \mp \frac{7}{5}, c = 0, d = \pm 3 \quad (\text{共に復号同順}) \\ a &= \pm 2, b = \pm 7, c = 0, d = \mp 3 \end{aligned}$$

となり、

$$A = \pm \begin{pmatrix} 2 & -\frac{7}{5} \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \pm \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

を得る。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	
7	1	3	2	1	3	
キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
9	4	2	7	9	3	5

【解説】

(1)

与式を式変形して

$$\begin{aligned}
 4\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AP} + 7(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB}) + 2(\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} &= \frac{7}{13}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{13}\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ①
 \end{aligned}$$

を得る。

(2)

点Pは線分AQ上にあるので、実数 k を使って

$$\overrightarrow{AQ} = k\overrightarrow{AP} \quad \dots\dots ②$$

と表せる。また、点Qは直線BC上にあるので、実数 t を使って

$$\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC} \quad \dots\dots ③$$

と表せる。①を k 倍すると

$$k\overrightarrow{AP} = \frac{7}{13}k\overrightarrow{AB} + \frac{2}{13}k\overrightarrow{AC}$$

となり、②③と比較して、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AQ} &= \frac{13}{9}\overrightarrow{AP} \\
 \overrightarrow{AQ} &= \frac{7}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{9}\overrightarrow{AC}
 \end{aligned}$$

を得る。よって、点Pは線分AQを9:4に内分する点であり、点Qは線分BCを2:7に内分する点である。

(3)

(2)より

$$AP:PQ=9:4 \quad \dots\dots ④$$

$$BQ:QC=2:7 \quad \dots\dots ⑤$$

である。④より、

$$\triangle ABP:\triangle PBQ=9:4 \quad \dots\dots ⑥$$

であり、⑤より、

$$\triangle PBQ:\triangle PQC=2:7 \quad \dots\dots ⑦$$

を得る。⑥、⑦より

$$\begin{aligned}
 \triangle ABP:\triangle CPQ &= 1:\frac{4}{9}\cdot\frac{7}{2} \\
 &= 9:14 \quad \dots\dots ⑧
 \end{aligned}$$

をえる。また、⑥、⑦より

$$\triangle ABP:\triangle CBP=9:(4+14)=1:2$$

となる。これと、

$$\triangle ABP:\triangle CBP=AR:RC$$

であることより、

$$AR:RC=1:2$$

となる。以上より

$$\begin{aligned}
 \triangle ABP:\triangle RPC &= 1:\frac{QC}{BQ}\cdot\frac{RC}{AC} \\
 &= 1:\frac{7}{2}\cdot\frac{2}{3} \\
 &= 3:7 \quad \dots\dots ⑨
 \end{aligned}$$

である。⑧、⑨より

$$\begin{aligned}
 \triangle ABP:\square CQPR &= \triangle ABP:(\triangle RPC + \triangle CPQ) \\
 &= 9:(14+21) \\
 &= 9:35
 \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
1	2	4	3	2	4	0	9	2

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax+1}{x^2+2} \\ f'(x) &= \frac{(ax+1)'(x^2+2) - (ax+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-ax^2 - 2x + 2a}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

である。 $f(x)$ は $x=\frac{4}{3}$ で極値をとるので

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{4}{3}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow -a\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{4}{3}\right) + 2a &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 12 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$a=12$ より、

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{12x+1}{x^2+2} \\ f'(x) &= \frac{-12x^2 - 2x + 24}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{-6\left(x - \frac{4}{3}\right)(2x+3)}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

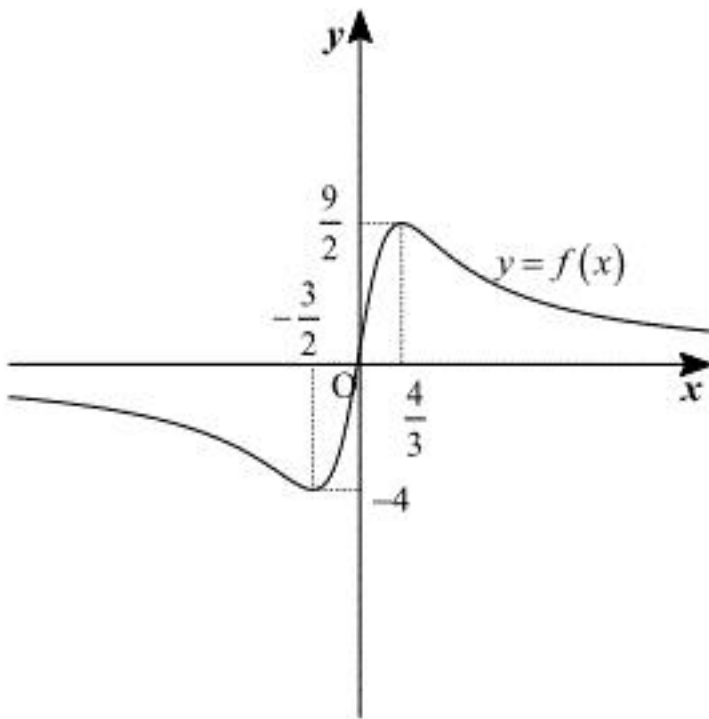
となる。よって、 $f(x)$ の増減表は下のようになる。

x		$-\frac{3}{2}$		$\frac{4}{3}$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$		-4		$\frac{9}{2}$	

また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0$ であるので、増減表より、 $f(x)$ の最小値は -4 である。

(3)

(2)の増減表より、曲線 $y=f(x)$ のグラフは下図のようになる。



上のグラフと $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -0$ より、曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ の共有点がただ1つになるのは

$$k = -4, 0, \frac{9}{2}$$

であるときである。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
2	2	2	1	4	4	1	2	1	2
サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
2	4	4	1	2	2	4	3		

〔解説〕

(1)

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \cos(2\pi x) dx, \quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \sin(2\pi x) dx$$

ここで、 a_n に対して部分積分を行い

$$\begin{aligned}
 a_n &= \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \cos(2\pi x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4} e^{-4x} \cos(2\pi x) \right]_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} (2\pi) (-\sin(2\pi x)) dx \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{-4\left(n+\frac{1}{4}\right)} \cos\left(2\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)\right) - e^{-4\left(n-\frac{1}{4}\right)} \cos\left(2\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right) \right\} - \frac{\pi}{2} b_n \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{-4\left(n+\frac{1}{4}\right)} \cos\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-4\left(n-\frac{1}{4}\right)} \cos\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \right\} - \frac{\pi}{2} b_n \\
 &= -\frac{\pi}{2} b_n
 \end{aligned}$$

を得る。また、 b_n に対しても部分積分を行い

$$\begin{aligned}
 b_n &= \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \sin(2\pi x) dx \\
 &= \left[-\frac{1}{4} e^{-4x} \sin(2\pi x) \right]_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} - \left(-\frac{1}{4} \right) \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} (2\pi) (\cos(2\pi x)) dx \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{-4\left(n+\frac{1}{4}\right)} \sin\left(2\pi\left(n+\frac{1}{4}\right)\right) - e^{-4\left(n-\frac{1}{4}\right)} \sin\left(2\pi\left(n-\frac{1}{4}\right)\right) \right\} + \frac{\pi}{2} a_n \\
 &= -\frac{1}{4} \left\{ e^{-4\left(n+\frac{1}{4}\right)} \sin\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}\right) - e^{-4\left(n-\frac{1}{4}\right)} \sin\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}\right) \right\} + \frac{\pi}{2} a_n \\
 &= -\frac{1}{4} \left(e^{-4\left(n+\frac{1}{4}\right)} + e^{-4\left(n-\frac{1}{4}\right)} \right) + \frac{\pi}{2} a_n \\
 &= \frac{\pi}{2} a_n - \frac{e^2 + 1}{4e^{4n+1}}
 \end{aligned}$$

を得る。以上より、

$$\begin{aligned}
 a_n &= -\frac{\pi}{2} b_n \\
 &= -\frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\pi}{2} a_n - \frac{e^2 + 1}{4e^{4n+1}} \right\} \\
 \Leftrightarrow a_n &= \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)e^{4n+1}}
 \end{aligned}$$

となる。

(2)

与式を求めると、

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)e^{4n+1}} \\
 &= \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)} \sum_{n=1}^{\infty} e^{(-4n-1)} \\
 &= \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^5} \cdot \frac{1 - (e^{-4})^n}{1 - e^{-4}} \\
 &= \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)(e^5 - e)} \left(\because \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-4})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{4n}} = 0 \right) \\
 &= \frac{\pi(e^2 + 1)}{2(\pi^2 + 4)e(e^2 + 1)(e^2 - 1)} \\
 &= \frac{\pi}{2(\pi^2 + 4)(e^3 - e)}
 \end{aligned}$$

となる。

5

(1)

まず,

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -1-t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 9-t^2 \end{pmatrix}$$

である。 $t=0$ のとき,

$$\overrightarrow{PA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \end{pmatrix}$$

であるから,

$$\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 6$$

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{2} \cdot \sqrt{90} \\ &= 6\sqrt{5} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{6}{6\sqrt{5}} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{5} \end{aligned}$$

である。

(答) $\frac{\sqrt{5}}{5}$

(2)

$$\begin{aligned} f(t) &= \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} \\ &= (-1-t)(3-t) + (1-t^2)(9-t^2) \\ &= (t^2 - 2t - 3) + (t^4 - 10t^2 + 9) \\ &= t^4 - 9t^2 - 2t + 6 \end{aligned}$$

となる。

(答) $f(t) = t^4 - 9t^2 - 2t + 6$

(3)

$$f(t) = (-1-t)(3-t) + (1-t^2)(9-t^2)$$

から,

$$f(-1) = f(3) = 0$$

である。これを利用して,

$$\begin{aligned} f(t) &= t^4 - 9t^2 - 2t + 6 \\ &= (t^2 - 2t - 3)(t^2 + 2t - 2) \\ &= (t+1)(t-3)(t^2 + 2t - 2) \end{aligned}$$

と書き表せられる。

(答) $f(t) = (t+1)(t-3)(t^2 + 2t - 2)$

(4)

$\overrightarrow{PA} \neq 0, \overrightarrow{PB} \neq 0$ のとき, $\theta = 90^\circ \Leftrightarrow f(t) = 0$ である。

$$\begin{aligned} t^2 + 2t - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= -1 \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

より, $f(t) = 0, -1 < t < 3$ を満たす t は,

$$t = -1 + \sqrt{3}$$

である。

(答) $-1 + \sqrt{3}$

(5)

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}| &= \sqrt{(-1-t)^2 + (1-t^2)^2} \cdot \sqrt{(3-t)^2 + (9-t^2)^2} \\ &= \sqrt{t^4 - t^2 + 2t + 2} \cdot \sqrt{t^4 - 17t^2 - 6t + 90} \\ \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PA}| \cdot |\overrightarrow{PB}|} \\ &= \frac{t^4 - 9t^2 - 2t + 6}{\sqrt{t^4 - t^2 + 2t + 2} \cdot \sqrt{t^4 - 17t^2 - 6t + 90}} \\ &= \frac{(t-3)(t^3 + 3t^2 - 2)}{(3-t)\sqrt{t^4 - t^2 + 2t + 2} \cdot \sqrt{t^2 + 6t + 10}} \end{aligned}$$

より,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 3-0} \cos \theta &= \frac{(t-3)(t^3 + 3t^2 - 2)}{(3-t)\sqrt{t^4 - t^2 + 2t + 2} \cdot \sqrt{t^2 + 6t + 10}} \\ &= -\frac{52}{\sqrt{80} \cdot \sqrt{37}} \\ &= -\frac{13\sqrt{185}}{185} \end{aligned}$$

である。

(答) $-\frac{13\sqrt{185}}{185}$