

G 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

〔注 意〕

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークせよ。

1 次の (1), (2), (3) において, 内のカタカナにあてはまる 0 から 9 までの数字を求め, その数字を解答用マークシートにマークせよ。ただし, 分数は既約分数 (それ以上約分できない分数) の形に表すものとする。 (40 点)

(1) 1 から 9 までの数字を 1 つずつ書いた 9 個の玉があり, これらの 9 個の玉が袋に入っているとき, 次の問いに答えよ。

(a) 袋から玉を 2 個同時に取り出すとき, 取り出された玉に書かれている数の

最大値が 7 である確率は $\frac{\text{ア}}{\text{イ}}$ である。

(b) 袋から玉を 3 個同時に取り出すとき, 取り出された玉に書かれている数の

最大値が 7 以下である確率は $\frac{\text{ウ}}{\text{エ オ}}$ である。

(c) 袋から玉を 3 個同時に取り出すとき, 取り出された玉に書かれている数の

最大値が 5 以上 7 以下である確率は $\frac{\text{カ キ}}{\text{ク ケ}}$ である。

(d) $1 \leq k \leq 9$ であるような自然数 k に対して, 袋から玉を k 個同時に取り出すとき, 取り出された玉に書かれている数の最大値が 7 である確率を p_k とする。 p_k が最大となるのは $k = \text{コ}$ のときである。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 3$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{4}{3}S_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

を満たすとする。ただし S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を表す。

(a) 数列 $\{d_n\}$ と $\{e_n\}$ をそれぞれ $d_n = a_{n+1} - 3a_n$, $e_n = a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n$ と定義したとき,

$$d_{n+1} = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} d_n, \quad e_{n+1} = \boxed{\text{ス}} e_n$$

を満たす。よって

$$a_n = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} \left(\boxed{\text{タ}}^n + \frac{1}{\boxed{\text{チ}}^{n-1}} \right)$$

である。

(b)

$$S_n = \frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}} \left(\boxed{\text{ト}}^n - \frac{1}{\boxed{\text{ナ}}^n} \right)$$

である。

(c) m を自然数としたとき、 $a_1, a_2, \dots, a_m$ をある順番に並べてできる数列を $b_1, b_2, \dots, b_m$ とする。

$$\sum_{k=1}^m (\sqrt{a_k} + \sqrt{b_k})^2$$

の値を最大とするような並び方にしたとき、その最大値は

$$\frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} \left(\boxed{\text{ネ}}^m - \frac{1}{\boxed{\text{ノ}}^m} \right)$$

である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

- (3) $r > 0$ とし, xy 平面上で中心 $(r, 0)$, 半径 r の円を考える。 $0 \leq x \leq t$ ($0 < t \leq 2r$) の範囲にある円の内部を x 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V_r(t)$ とおく。

- (a) 体積 $V_r(t)$ は

$$V_r(t) = \pi t^2 \left(r - \frac{t}{\boxed{\text{ハ}}} \right)$$

である。

- (b) $a > 0$ とし, 半径 a の球 B_1 と半径 $\frac{a}{3}$ の球 B_2 があって, B_2 の中心は B_1 の表面上にあるとする。このとき, B_1 と B_2 の内部の共通部分からなる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= V_a \left(\frac{a}{\boxed{\text{ヒ} \mid \text{フ}}} \right) + V_{\frac{a}{3}} \left(\frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ} \mid \text{マ}}} a \right) \\ &= \frac{\boxed{\text{ミ}}}{\boxed{\text{ム} \mid \text{メ} \mid \text{モ}}} \pi a^3 \end{aligned}$$

である。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **2** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

2

a を正の実数とする。実数 x に対し、

$$f(x) = \frac{1}{a+x} \quad (x \neq -a), \quad g(x) = \frac{1}{a-x} \quad (x \neq a)$$

と定める。

(30 点)

(1) $f(x) = g(x)$ を満たす実数 x の値を求めよ。

(2) $f(x) \leq g(x)$ を満たす実数 x の値の範囲 ($x \neq a, -a$) を求めよ。

(3) すべての正の実数 x に対して

$$f(x+1) < \log(x+4) - \log(x+3) < f(x)$$

が成立するような自然数 a の値を求めよ。ただし、対数は自然対数とする。

(4)

$$\frac{1}{100} < 1 - e^{-\frac{1}{n}}$$

を満たす最大の自然数 n を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。

問題 **3** の解答は解答用紙に記入せよ。答だけでなく答を導く過程も記入せよ。

3

xy 平面上に点 $A(1, 0)$ と点 $B(0, 1)$ をとる。また、傾きが -1 で点 A を通る直線を ℓ_1 、傾きが -1 で点 $(2, 0)$ を通る直線を ℓ_2 で表す。 ℓ_1 上にない点 $P(a, b)$ に対し、直線 AP と ℓ_2 との交点を C 、直線 BP と ℓ_1 との交点を D とするとき、次の問いに答えよ。

(30 点)

- (1) C, D の座標を a, b を用いて表せ。
- (2) $a + b = t$ とおくとき、線分 CD の長さを t を用いて表せ。ただし、 C と D が一致するときは線分 CD の長さは 0 とする。
- (3) 点 $P(a, b)$ が点 $(2, 2)$ を中心とする半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円周上を動くとき、線分 CD の長さのとり得る値の範囲を求めよ。
- (4) 点 $P(a, b)$ が双曲線 $xy = 1$ 上を動くとき、線分 CD の長さのとり得る値の範囲を求めよ。

右のページは白紙である。必要に応じて計算欄として使用してよい。