

P 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 4 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用マークシートにマークしたものが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 ~ 4 の各文章中の ア, イ, ウ, ... に当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。根号の中は、4 でも 9 でも割り切れないものとします。なお、ア は既出の ア を表します。

1 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $A(a, a^2), B(b, b^2)$ ($0 \leq a < b$) に対して、 $L(a, b)$ を線分 AB の長さとし、 $S(a, b)$ を線分 AB と放物線 $y = x^2$ で囲まれた図形の面積とする。さらに、 $T(a, b)$ を $a \leq x \leq b$ の範囲で放物線 $y = x^2$ と x 軸で囲まれた図形の面積とする。

(1) (a) $L(0, t) = \frac{1}{2}L(0, 1)$ となるのは、 $t^2 = \frac{1}{\text{ア}}(\sqrt{\text{イ}} - \text{ウ})$ となるときである。

(b) $L(0, t) = L(t, 1)$ となるのは、 $t = \frac{1}{\text{エ}}(\sqrt{\text{オ}} - \text{カ})$ のときである。

(2) (a) $S(0, t) = \frac{1}{2}S(0, 2)$ となるのは、 $\log_2 t = \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ となるときである。

(b) $T(t, 2) = S(0, 2)$ となるのは、 $\log_2 t = \frac{\text{ケ}}{\text{コ}}$ となるときである。

(25 点)

右のページは白紙です。

2 k を定数として、3 次方程式

$$x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - k = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。

(1) この方程式が、異なる 3 つの実数解をもつような k の値の範囲は

$$-\boxed{\text{ア}}\boxed{\text{イ}} < k < \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}} \quad \dots\dots (**)$$

である。

(2) k が $(**)$ の範囲にあるとき、方程式 $(*)$ の 3 つの解を α, β, γ (ただし $\alpha < \beta < \gamma$) とおく。

(a) k が $(**)$ の範囲を動くとき、 α, β, γ の取りうる値の範囲は、それぞれ

$$-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}} < \alpha < -\boxed{\text{キ}}, \quad -\boxed{\text{ク}} < \beta < \boxed{\text{ケ}}, \quad \boxed{\text{コ}} < \gamma < \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$$

である。

(b) k が $(**)$ の範囲を動くとき、 α と γ の積 $\alpha\gamma$ が最小となるのは

$$k = -\frac{\boxed{\text{ス}}\boxed{\text{セ}}\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}\boxed{\text{チ}}}$$

$$\text{のときであって、}\alpha\gamma\text{の最小値は}-\frac{\boxed{\text{ツ}}\boxed{\text{テ}}\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}\boxed{\text{ニ}}}\text{である。}$$

(25 点)

右のページは白紙です。

3

O を原点とする xyz 空間の x 軸上, y 軸上, z 軸上にそれぞれ点 A, B, C があ
り, $AB = 3, AC = 2$ であるという。そのとき, $BC = a$ とおき, 三角形 ABC の面
積を S とおく。

(1) a の取りうる値の範囲は

$$\sqrt{\boxed{\text{ア}}} \leq a \leq \sqrt{\boxed{\text{イ}} \boxed{\text{ウ}}}$$

である。

(2) (a) $\cos \angle BAC = \frac{1}{\boxed{\text{エ}} \boxed{\text{オ}}} (-a^2 + \boxed{\text{カ}} \boxed{\text{キ}})$ である。

(b) $S^2 = \frac{1}{\boxed{\text{ク}} \boxed{\text{ケ}}} (-a^4 + \boxed{\text{コ}} \boxed{\text{サ}} a^2 - \boxed{\text{シ}} \boxed{\text{ス}})$ である。

(3) $OA = x$ において, S^2 を x を用いて表すと

$$S^2 = -\frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}} x^4 + \boxed{\text{タ}}$$

となる。

(4) $S = 2\sqrt{2}$ のとき, 四面体 OABC に内接する球 (すなわち, 中心がこの四面体
の内部にあつて, すべての面と 1 点のみを共有する球) の半径を r とおく。

(a) $r = \frac{\sqrt{\boxed{\text{チ}}}}{1 + \boxed{\text{ツ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}}}$ である。

(b) $r = \boxed{\text{ニ}} \sqrt{\boxed{\text{チ}}} - \boxed{\text{ヌ}} \sqrt{\boxed{\text{テ}}} + \boxed{\text{ネ}} \sqrt{\boxed{\text{ト}} \boxed{\text{ナ}}} - \boxed{\text{ノ}}$ となる。

(25 点)

右のページは白紙です。

4

r は 2 以上 9 以下の自然数とする。 n を r 以上の自然数として、次の条件を満たす n 桁の自然数を考える。

(i) 各位の数は 1 から r までの数 $1, 2, \dots, r$ のどれかである。

(ii) $1, 2, \dots, r$ のどの一つも必ずどこかの位に現れる。

このような自然数全体の集合を考え、この集合の要素の個数を ${}_rS_n$ とおく。また、この集合のすべての要素の和を $f_r(n)$ とおく。

(1) $r = 2$ とする。

(a) ${}_2S_2 = \boxed{\text{ア}}$, ${}_2S_3 = \boxed{\text{イ}}$ である。

一般に、 ${}_2S_n = \boxed{\text{ウ}}^n - \boxed{\text{エ}}$ である。

(b) $f_2(2) = \boxed{\text{オカ}}$, $f_2(3) = \boxed{\text{キクケ}}$ である。

一般に、 $f_2(n) = \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} (\boxed{\text{シス}}^n - 1) \cdot {}_2S_n$ が成り立つ。

(2) $r = 3$ とする。

(a) ${}_3S_n = \boxed{\text{セ}}^n - \boxed{\text{ソ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^n + \boxed{\text{タ}}$ である。

(b) $f_3(n) = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}} (\boxed{\text{シス}}^n - 1) \cdot {}_3S_n$ が成り立つ。

(3) $r = 4$ とする。

(a) ${}_4S_n = \boxed{\text{テ}}^n - \boxed{\text{ト}} \cdot \boxed{\text{セ}}^n + \boxed{\text{ナ}} \cdot \boxed{\text{ウ}}^n - \boxed{\text{ニ}}$ である。

(b) $f_4(n) = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}} (\boxed{\text{シス}}^n - 1) \cdot {}_4S_n$ が成り立つ。

(25 点)

右のページは白紙です。