

L 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ン までに当てはまる数字 0 ~ 9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、タ などは既出の タ を表します。

(40 点)

(1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n と表す。すべての自然数 n に対して

$$S_n = -\frac{3}{4}a_n + 2n + 5$$

が成り立つとする。このとき

$$a_1 = \boxed{\text{ア}}$$
$$a_{n+1} = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}a_n + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。これより

$$a_n = \boxed{\text{カ}} \times \left(\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \right)^{n-1} + \boxed{\text{ケ}} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となる。

右のページは白紙です。

(2) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2$ とし, xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とする。

曲線 C 上の点 $(a, f(a))$ における接線 ℓ_a の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{コ}} a^3 + \boxed{\text{サ}} a^2 - \boxed{\text{シ}} a \right) x + \left(-\boxed{\text{ス}} a^4 - \boxed{\text{セ}} a^3 + \boxed{\text{ソ}} a^2 \right)$$

である。曲線 C と接線 ℓ_a の共有点の x 座標を t とおくと, t は

$$(t-a)^2 \left\{ t^2 + \left(\boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}} \right) t + \left(\boxed{\text{ツ}} a^2 + \boxed{\text{テ}} a - \boxed{\text{ト}} \right) \right\} = 0$$

を満たす。ここで, t についての 2 次方程式

$$t^2 + \left(\boxed{\text{タ}} a + \boxed{\text{チ}} \right) t + \left(\boxed{\text{ツ}} a^2 + \boxed{\text{テ}} a - \boxed{\text{ト}} \right) = 0$$

が重解をもつのは $a = -\boxed{\text{ナ}}, \boxed{\text{ニ}}$ のときである。 $a = \boxed{\text{ニ}}$ のとき, ℓ_a は点 $(a, f(a))$ 以外に, x 座標が $-\boxed{\text{ヌ}}$ となる点においても曲線 C に接する。

このとき, C と ℓ_a で囲まれた部分の面積は $\frac{\boxed{\text{ネ}} \boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}} \boxed{\text{ヒ}}}$ である。

右のページは白紙です。

(3) 原点を O とする座標平面において、3点 $A(1, 0)$, $B(0, 6)$, $P(3, 4)$ をとる。

(a) 直線 OP 上の O と異なる2点 C, D について、 $\triangle OAC$ と $\triangle ODB$ は直角三角形であり、線分 AC と線分 BD は平行であるとする。このとき

$$AC = \frac{\boxed{\text{フ}}}{\boxed{\text{ヘ}}}, \quad BD = \frac{\boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}}}{\boxed{\text{ミ}}}$$

であり、また

$$CD = \frac{\boxed{\text{ム}} \boxed{\text{メ}}}{\boxed{\text{モ}}}$$

である。

(b) 直線 OP 上の O と異なる点 Q の x 座標を t とする。

まず、 $\triangle OAQ$ の面積を S_1 , $\triangle OBQ$ の面積を S_2 とする。このとき、面積比 $S_1 : S_2$ は t によらず一定であり、

$$S_1 : S_2 = \boxed{\text{ヤ}} : \boxed{\text{ユ}}$$

である。

次に、線分 AQ の長さを a , 線分 BQ の長さを b とする。このとき、 $a - b$ は

t の関数であり、 $f(t) = a - b$ とおく。 $t = \frac{\boxed{\text{ヨ}}}{\boxed{\text{ラ}}}$ のとき $f(t) = 0$ となり、この

とき $a = b = \frac{\sqrt{\boxed{\text{リ}} \boxed{\text{ル}} \boxed{\text{レ}}}}{\boxed{\text{ロ}}}$ である。また $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \frac{\boxed{\text{ワ}} \boxed{\text{ヲ}}}{\boxed{\text{ン}}}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 xy 平面において、曲線 $y = \frac{2}{\sqrt{x}}$ ($x > 0$) と、2 直線 $x = 1$, $y = 1$ で囲まれた図形を D とおく。

(30 点)

- (1) D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。
- (2) $r < 1$ とする。 D を直線 $x = r$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 W を、 r を用いて表せ。
- (3) (1), (2) で求めた V, W について、 $V = W$ となる r を求めよ。
- (4) (3) で求めた r は $\frac{2}{3}$ より大きい小さいかを、理由とともに答えよ。
必要であれば、自然対数の底 e について、 $e = 2.718\cdots$ を用いてよい。

右のページは白紙です。

問題 **3** の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 座標空間において、2点 $A(0, 3, 6)$, $P(\sqrt{5} \cos \theta, 2 \sin \theta, -\sin \theta)$ ($0 \leq \theta < 2\pi$) を通る直線と、 xy 平面の交点を $Q(a, b, 0)$ とする。

(30 点)

- (1) 2点 A, P 間の距離 $|\overrightarrow{AP}|$ を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AQ} = t\overrightarrow{AP}$ となるような実数 t を、 θ を用いて表せ。また、 a, b を、 θ を用いて表せ。
- (3) $0 \leq \theta < 2\pi$ における a の最大値を求めよ。
- (4) $0 < \theta < \pi$ とする。このとき、2点 P, Q 間の距離 d を、 θ を用いて表せ。
また、 $\frac{d}{b}$ の値を求めよ。

右のページは白紙です。