

A 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(HBまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえ、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

以下の問題 **1**, **2**, **3**, **4** において, $\square$ 内のカタカナの1文字にあてはまる0から9までの数字を求めて, 解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし, 分数は既約分数で表しなさい。なお, $\boxed{\text{ア}}$ のようなカタカナ1文字は1桁^{けた}の数を表し, $\boxed{\text{アイ}}$ のようなカタカナ2文字は2桁の数を表すものとします。

1 (15点)

A, B は共に実数を成分とする2次の正方行列で, 条件

$$AB = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}, \quad A^{-1}B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

を満たすものとする。

(1) $B^{-1}A = \begin{pmatrix} \boxed{\text{ア}} & -\boxed{\text{イ}} \\ \boxed{\text{ウ}} & -\boxed{\text{エ}} \end{pmatrix}$ である。

(2) $A^2 = \begin{pmatrix} \boxed{\text{オ}} & -\boxed{\text{カ}} \\ \boxed{\text{キ}} & \boxed{\text{ク}} \end{pmatrix}$ である。

(3) 条件を満たす A は以下の4つである。

$$A = \pm \begin{pmatrix} \boxed{\text{ケ}} & -\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}} \\ \boxed{\text{シ}} & \boxed{\text{ス}} \end{pmatrix}, \quad \pm \begin{pmatrix} \boxed{\text{セ}} & \boxed{\text{ソ}} \\ \boxed{\text{タ}} & -\boxed{\text{チ}} \end{pmatrix}$$

右のページは白紙です。

2

(15 点)

平面上に同一直線上にない 3 点 A, B, C が与えられているとし, $\triangle ABC$ の内部の点 P が

$$4\overrightarrow{AP} + 7\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP} = \vec{0}$$

を満たしているとする。線分 AP を延長した直線と線分 BC との交点を Q, 線分 BP を延長した直線と線分 AC との交点を R とおく。

(1)

$$\overrightarrow{AP} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イウ}}} \overrightarrow{AB} + \frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オカ}}} \overrightarrow{AC}$$

である。

(2) 点 P は線分 AQ を $\boxed{\text{キ}} : \boxed{\text{ク}}$ に内分する点であり, 点 Q は線分 BC を

$\boxed{\text{ケ}} : \boxed{\text{コ}}$ に内分する点である。

(3) $\triangle APB$ の面積を S , 四角形 CQPR の面積を T とおくと,

$$S : T = \boxed{\text{サ}} : \boxed{\text{シス}}$$

である。

右のページは白紙です。

3 (15点)

a を正の実数として、

$$f(x) = \frac{ax+1}{x^2+2}$$

とおく。 $f(x)$ は $x = \frac{4}{3}$ で極値をとるとする。

(1) a の値は **アイ** である。

(2) $f(x)$ の最小値は $-\text{ウ}$ であり、そのときの x の値は $-\frac{\text{エ}}{\text{オ}}$ である。

(3) k を実数として、座標平面上で曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = k$ を考える。その

共有点がただ1つになるのは、 $k = -\text{カ}, \text{キ}, \frac{\text{ク}}{\text{ケ}}$ のときである。

右のページは白紙です。

4 (15 点)

数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を

$$a_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \cos(2\pi x) dx, \quad b_n = \int_{n-\frac{1}{4}}^{n+\frac{1}{4}} e^{-4x} \sin(2\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

と定める。ただし、 e は自然対数の底を表す。

(1) a_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより、

$$a_n = -\frac{\pi}{\boxed{\text{ア}}} b_n$$

がわかる。

一方、 b_n を定める定積分に対して部分積分を行うことにより、

$$b_n = \frac{\pi}{\boxed{\text{イ}}} a_n - \frac{e^{\boxed{\text{ウ}}} + \boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}} e^{\boxed{\text{カ}}} n + \boxed{\text{キ}}}$$

がわかる。

これらの関係式より、 a_n は

$$a_n = \frac{\pi \left(e^{\boxed{\text{ク}}} + \boxed{\text{ケ}} \right)}{\boxed{\text{コ}} \left(\pi^{\boxed{\text{サ}}} + \boxed{\text{シ}} \right) e^{\boxed{\text{ス}}} n + \boxed{\text{セ}}}$$

となることがわかる。

(2) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の和は $\frac{\pi}{\boxed{\text{ソ}} \left(\pi^{\boxed{\text{タ}}} + \boxed{\text{チ}} \right) \left(e^{\boxed{\text{ツ}}} - e \right)}$ となる。

右のページは白紙です。

問題 **5** の解答は解答用紙に記入しなさい。

5 (40 点)

座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(3, 9)$ をとり、 t を実数として、点 $P(t, t^2)$ をとる。 $f(t) = \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ とおく。ただし、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ は 2 つのベクトル $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ の内積を表している。さらに、 $t \neq -1, 3$ のとき、2 つのベクトル $\overrightarrow{PA}$ と $\overrightarrow{PB}$ のなす角を θ とおく。ただし、 $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1) $t = 0$ のときの $\cos \theta$ の値を求めよ。
- (2) $f(t)$ は t の 4 次式となる。それを降べきの順に整理して書け。
- (3) $f(t)$ は

$$f(t) = (t+m)(t+n)(t^2+at+b) \quad \left(\text{ただし、} m, n, a, b \text{ は } \underline{\underline{\text{整数}}} \right)$$

の形に書ける。 $f(t)$ をこの形に書き表せ。

- (4) $-1 < t < 3$ の範囲内で、 $\theta = 90^\circ$ となるとき t の値を求めよ。
- (5) 左側からの極限 $\lim_{t \rightarrow 3-0} \cos \theta$ の値を求めよ。

