

1

【解答】

(1)	(a)											
	(b)	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
		4	7	6	7	2	3	7	6	7	2	
(c)	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト			
	4	2	9	4	2	8	4	2	1			
(2)	(a)	ナ	ニ	ヌ								
		1	2	2								
	(b)	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ				
		3	6	2	1	9	2	3				
	(c)	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル
		4	3	2	2	1	6	4	2	7	8	3

【解説】

(1)
(a)
楕円 E の焦点は x 軸上にあるため、 $0 < b^2 < 4$ を満たす。よって
$$\sqrt{4-b^2}=1$$
$$\Leftrightarrow 4-b^2=1$$
$$\therefore b=\sqrt{3} \left(\because b>0 \right)$$
となる。
(b)
2 点 A, C を通る直線の方程式は
$$y=\frac{0-1}{-1-0}(x+1)$$
$$=x+1$$
となる。これと楕円 E の方程式から y を消去すると、

$$\frac{x^2}{4}+\frac{(x+1)^2}{(\sqrt{3})^2}=1$$
$$\Leftrightarrow 7x^2+8x-8=0$$
$$\Leftrightarrow x=\frac{-4\pm6\sqrt{2}}{7}$$

となる。よって $x_0 > 0$ より $x_0=\frac{-4+6\sqrt{2}}{7}$ であり、 $y_0=x_0+1$ から $y_0=\frac{3+6\sqrt{2}}{7}$ となる。

(c)
楕円上の点から 2 つの焦点までの距離の和は楕円の長軸の長さに等しい。したがって、
 $PA+PB=4$
が成り立つ。また、 $A(-1, 0)$, $C(0, 1)$ であり、3 点 A, C, P が一直線上に存在することから、
 $PC=PA-AC$
$$=PA-\sqrt{(-1-0)^2+(0-1)^2}$$
$$=PA-\sqrt{2}$$
$$\therefore PB+PC=PA-\sqrt{2}+PB=4-\sqrt{2}$$
となる。次に、 $QB+QC=4-\sqrt{2}$ をみたす点 $Q(x, y)$ の描く軌跡について考える。
 $B(1, 0)$, $C(0, 1)$ より

$$QB+QC=4-\sqrt{2}$$
$$\Leftrightarrow QB=4-\sqrt{2}-QC$$
$$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+y^2}=4-\sqrt{2}-\sqrt{x^2+(y-1)^2}$$

となるが、 $QB > 0$ かつ $4-\sqrt{2} > QC$ より、上式の両辺はともに正であるから、両辺を 2 乗して整理すると

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+y^2=\left(-\sqrt{x^2+(y-1)^2}+4-\sqrt{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow (4-\sqrt{2})\sqrt{x^2+(y-1)^2}=x-y+9-4\sqrt{2} \qquad \cdots \textcircled{1}$$

$$\Rightarrow (4-\sqrt{2})^2\{x^2+(y-1)^2\}=(x-y+9-4\sqrt{2})^2 \qquad \cdots \textcircled{2}$$

$$\Leftrightarrow 2(9-4\sqrt{2})\{x^2+(y-1)^2\}=(x-y)^2+2(9-4\sqrt{2})(x-y)+(9-4\sqrt{2})^2$$

となる。 $x-y=X$, $x+y=Y$ とおくと、 $x=\frac{X+Y}{2}$, $y=\frac{Y-X}{2}$ であるから、これを上式に代入して整理すると、

$$2(9-4\sqrt{2})\left\{\left(\frac{X+Y}{2}\right)^2+\left(\frac{Y-X}{2}-1\right)^2\right\}=X^2+2(9-4\sqrt{2})X+(9-4\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (9-4\sqrt{2})(X^2+Y^2+2X-2Y+2)=X^2+2(9-4\sqrt{2})X+(9-4\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow (8-4\sqrt{2})X^2+(9-4\sqrt{2})(Y-1)^2=(8-4\sqrt{2})(9-4\sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \frac{X^2}{9-4\sqrt{2}}+\frac{(Y-1)^2}{8-4\sqrt{2}}=1$$

$$\therefore \frac{(x-y)^2}{9-4\sqrt{2}}+\frac{(x+y-1)^2}{8-4\sqrt{2}}=1 \qquad \cdots \textcircled{3}$$

となる。ここで、同値でない変形は① $\Rightarrow$ ②のみであったから、② $\Rightarrow$ ①を示せば
 $QB+QC=4-\sqrt{2} \Leftrightarrow$ ③となり、③が求める軌跡の方程式となる。③より

$$\frac{(x-y)^2}{9-4\sqrt{2}}\leq 1 \Leftrightarrow -\sqrt{9-4\sqrt{2}}\leq x-y\leq \sqrt{9-4\sqrt{2}}$$

であるから、 $\sqrt{2} < 2$ より $\sqrt{9-4\sqrt{2}} > \sqrt{1}=1$ であることに注意すると、

$$x-y+9-4\sqrt{2}\geq -\sqrt{9-4\sqrt{2}}+9-4\sqrt{2}$$
$$=\sqrt{9-4\sqrt{2}}(\sqrt{9-4\sqrt{2}}-1)$$
$$> 0$$

となる。一方、②を変形すると

$$(4-\sqrt{2})^2(x^2+(y-1)^2)=(x-y+9-4\sqrt{2})^2$$
$$\Leftrightarrow \left\{(4-\sqrt{2})\sqrt{x^2+(y-1)^2}+(x-y+9-4\sqrt{2})\right\}\left\{(4-\sqrt{2})\sqrt{x^2+(y-1)^2}-(x-y+9-4\sqrt{2})\right\}=0$$

となるが、 $(4-\sqrt{2})\sqrt{x^2+(y-1)^2}+(x-y+9-4\sqrt{2}) > 0$ より

$$(4-\sqrt{2})\sqrt{x^2+(y-1)^2}-(x-y+9-4\sqrt{2})=0$$

となるから、② $\Rightarrow$ ①が示された。したがって、
 $QB+QC=4-\sqrt{2} \Leftrightarrow$ ③

となるので、求める点 Q の軌跡の方程式は③である。

(2)
(a)
仮定より放物線 C は点 $(0, 0)$, $(k, 0)$ を通ることから、実数 $a \neq 0$ を用いて $C:y=ax(x-k)$ とおける。また、放物線 C は点 $(2, 2)$ を通ることから、

$$2=2a(2-k)$$
$$\therefore a=\frac{1}{2-k} \left(\because k>2 \right)$$

となる。よって、放物線 C の方程式は

$$y=\frac{x(x-k)}{2-k}$$
$$=-\frac{1}{k-2}x^2+\frac{k}{k-2}x$$

となる。

(b)
放物線 C は上に凸であるから、
$$S=-\frac{1}{k-2}\int_0^k x(x-k)dx$$
$$=\frac{k^3}{6(k-2)}$$
となる。よって、

$$\frac{dS}{dk}=\frac{3k^2(k-2)-k^3}{6(k-2)^2}$$
$$=\frac{2k^3-6k^2}{6(k-2)^2}$$
$$=\frac{k^2(k-3)}{3(k-2)^2}$$

となるので、 S の増減は下のようになる。

k	(2)	$\cdots$	3	$\cdots$
$\frac{dS}{dk}$		-	0	+
S		$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$

よって、 $k=3$ のときに S は最小値 $\frac{9}{2}$ をとる。

(c)
$$C:y=-\frac{1}{k-2}\left(x-\frac{k}{2}\right)^2+\frac{k^2}{4(k-2)}$$
と変形できるので、放物線 C の軸は $x=\frac{k}{2}$ である。ここで、放物線 C を x 軸の負の方向に $\frac{k}{2}$ だけ平行移動して得られる放物線を C' とすると、
$$C':y=-\frac{1}{k-2}x^2+\frac{k^2}{4(k-2)}$$
であり、軸は $x=0$ となるから、求める体積は放物線 C' を y 軸周りに回転させて得られる立体の体積である。ここで、放物線 C' について
$$x^2=-(k-2)y+\frac{k^2}{4}$$
となるので

$$V=\pi\int_0^{\frac{k^2}{4(k-2)}}x^2dy$$
$$=\pi\int_0^{\frac{k^2}{4(k-2)}}\left\{-(k-2)y+\frac{k^2}{4}\right\}dy$$
$$=\pi\left[-\frac{k-2}{2}y^2+\frac{k^2}{4}y\right]_0^{\frac{k^2}{4(k-2)}}$$
$$=\frac{\pi k^4}{32(k-2)}$$

となる。よって

$$\frac{dV}{dk}=\frac{4k^3(k-2)-k^4}{32(k-2)^2}\pi$$
$$=\frac{k^3(3k-8)}{32(k-2)^2}\pi$$

となるから、 V の増減は下のようになる。

k	(2)	$\cdots$	$\frac{8}{3}$	$\cdots$
$\frac{dV}{dk}$		-	0	+
V		$\searrow$	$\frac{64}{27}\pi$	$\nearrow$

よって、 $k=\frac{8}{3}$ のときに V は最小値 $\frac{64}{27}\pi$ をとる。

2

(1)

数 x, y, z を正の整数とすると、3 辺の長さが x, y, z ($x \leq y \leq z$) となる三角形を考える。こ

のとき、

$$x+y>z$$

であることに注意すると、 $z=5$ のとき、

$$(x, y, z)=(1, 5, 5), (2, 4, 5), (2, 5, 5), (3, 3, 5), (3, 4, 5), \\ (3, 5, 5), (4, 4, 5), (4, 5, 5), (5, 5, 5)$$

の 9 通りの三角形が考えられるので、

$$a_5=9$$

である。また、 $z=6$ のとき、

$$(x, y, z)=(1, 6, 6), (2, 5, 6), (2, 6, 6), (3, 4, 6), (3, 5, 6), (3, 6, 6), \\ (4, 4, 6), (4, 5, 6), (4, 6, 6), (5, 5, 6), (5, 6, 6), (6, 6, 6)$$

の 12 通りの三角形が考えられるので、

$$a_6=12$$

である。

$$(\text{答}) \ a_5=9, a_6=12$$

(2)

$z=n$ のとき、三角形の成立条件より、

$$x+y>n$$

$$\Leftrightarrow y \geq -x+n+1 \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、

$$x \leq y \leq n \quad \cdots \textcircled{2}$$

である。したがって、 x を固定して①、②を満たすような y の個数を数えていく。

$$(-x+n+1) \leq x$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{n+1}{2} \quad \cdots \textcircled{3}$$

であるから、 n の偶奇で場合分けして考える。

[1] n が奇数のとき、

$$n=2k-1 \text{ とおくと、}$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow x \leq k$$

となる。したがって、 $x=l$ と固定すると、 $l \leq k$ のとき、 (x, y, z) の個数は、

$$-l+(2k-1)+1 \leq y \leq 2k-1$$

を満たす y の個数に等しく、

$$(2k-1)-(-l+2k)+1=l \text{ [個]}$$

となる。また、 $l>k$ のとき、 (x, y, z) の個数は、

$$l \leq y \leq 2k-1$$

を満たす y の個数に等しいので、

$$(2k-1)-l+1=-l+2k \text{ [個]}$$

となる。したがって、

$$a_n=a_{2k-1} \\ =\sum_{l=1}^k l+\sum_{l=k+1}^{2k-1} (-l+2k) \\ =2\sum_{l=1}^{k-1} l+k \\ =2\cdot\frac{1}{2}(k-1)k+k \\ =k^2 \\ =\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

と求まる。

[2] n が偶数のとき、

$$n=2k \text{ とおくと、}$$

$$\textcircled{3} \Leftrightarrow x \leq \frac{2k+1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x \leq k \quad (\because k \text{ が整数})$$

となる。したがって、 $x=l$ と固定すると、 $l \leq k$ のとき、 (x, y, z) の個数は、

$$-l+2k+1 \leq y \leq 2k$$

を満たす y の個数に等しく、

$$2k-(-l+2k+1)+1=l \text{ [個]}$$

となる。また、 $l>k$ のとき、 (x, y, z) の個数は、

$$l \leq y \leq 2k$$

を満たす y の個数に等しいので、

$$2k-l+1 \text{ [個]}$$

となる。したがって、

$$a_n=a_{2k} \\ =\sum_{l=1}^k l+\sum_{l=k+1}^{2k} (-l+2k+1) \\ =2\sum_{l=1}^k l \\ =2\cdot\frac{1}{2}k(k+1) \\ =k^2+k \\ =\frac{1}{4}n(n+2)$$

と求まる。

[1], [2]より、

$$a_n=\begin{cases} \frac{1}{4}(n+1)^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{4}n(n+2) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

である。

$$(\text{答}) \ a_n=\begin{cases} \frac{1}{4}(n+1)^2 & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{4}n(n+2) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(3)

(a)

(2)より、 n が奇数のとき、

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} a_{2k} \\ =\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}} k^2+\sum_{k=1}^{\frac{n-1}{2}} (k^2+k) \\ =\frac{1}{6}\frac{n+1}{2}\frac{n+3}{2}(n+2)+\frac{1}{6}\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2}n+\frac{1}{2}\frac{n-1}{2}\frac{n+1}{2} \\ =\frac{1}{24}(n+1)(n+2)(n+3)+\frac{1}{24}(n-1)n(n+1)+\frac{1}{8}(n-1)(n+1) \\ =\frac{1}{24}(n+1)(2n^2+7n+3) \\ =\frac{1}{24}(n+1)(n+3)(2n+1)$$

であり、 n が偶数のとき、

$$b_n=\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} a_{2k} \\ =\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} k^2+\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} (k^2+k) \\ =2\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right)\cdot(n+1)+\frac{1}{2}\cdot\frac{n}{2}\cdot\left(\frac{n}{2}+1\right) \\ =\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)+\frac{1}{8}n(n+2) \\ =\frac{1}{24}n(n+2)(2n+5)$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ b_n=\begin{cases} \frac{1}{24}(n+1)(n+3)(2n+1) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{24}n(n+2)(2n+5) & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

(b)

n を偶数とすると、

$$\frac{1}{24}(n+1)\{(n+1)+2\}\{2(n+1)+5\}=\frac{1}{24}(n+1)(n+3)(2n+7) \\ =\frac{1}{12}n^3+\frac{5}{8}n^2+\frac{17}{12}n+\frac{7}{8} \\ \frac{1}{24}\{(n+2)+1\}\{(n+2)+3\}\{2(n+2)+1\}=\frac{1}{24}(n+3)(n+5)(2n+5) \\ =\frac{1}{12}n^3+\frac{7}{8}n^2+\frac{35}{12}n+\frac{25}{8}$$

であるから、

$$\frac{1}{24}(n+1)(n+3)(2n+1)<\frac{1}{24}(n+1)\{(n+1)+2\}\{2(n+1)+5\} \\ \frac{1}{24}(n+1)\{(n+1)+2\}\{2(n+1)+5\}<\frac{1}{24}\{(n+2)+1\}\{(n+2)+3\}\{2(n+2)+1\}$$

が成り立つので、 b_n は単調増加する。また、 n を奇数とした際にも同様のことがいえるので、

結局 b_n は単調増加することが分かる。ここで、

$$b_{10}=125, b_{20}=825, b_{30}=2600$$

であるから、 $b_n>2015$ となるような最小の n は、

$$20< n \leq 30$$

を満たす。

$$b_{27}=1925, b_{28}=2135$$

であるから、求める n は、

$$n=28$$

である。

$$(\text{答}) \ n=28$$

(4)

$y=z$ を満たす三角形の個数は、 n 個ある。 $x=y \neq z$ を満たす三角形の個数は、 $x+y>z$ であるから、

$$\frac{n}{2}<y<n$$

を満たす y の個数に等しいので、 n が奇数のとき、

$$(n-1)-\frac{n+1}{2}+1=\frac{n-1}{2} \text{ [個]}$$

であり、 n が偶数のとき

$$(n-1)-\left(\frac{n}{2}+1\right)+1=\frac{n}{2}-1 \text{ [個]}$$

である。したがって、

$$c_n=\begin{cases} \frac{1}{4}(n+1)^2-\left(n+\frac{n-1}{2}\right)=\frac{1}{4}(n-1)(n-3) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{4}n(n+2)-\left(n+\frac{n}{2}-1\right)=\frac{1}{4}(n-2)^2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \ c_n=\begin{cases} \frac{1}{4}(n-1)(n-3) & (n \text{ が奇数のとき}) \\ \frac{1}{4}(n-2)^2 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

3

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x}{x-1} &\geq 0 \\ \Leftrightarrow [x > 1 \text{ かつ } x \geq 0] \text{ または } [x < 1 \text{ かつ } x \leq 0] \\ \Leftrightarrow x > 1 \text{ または } x \leq 0\end{aligned}$$

である。

(答) $x > 1$ または $x \leq 0$

(2)

$$\begin{aligned}a_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 3 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= 3 \\ a_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3 \sqrt[3]{1 - \frac{1}{x}} \\ &= 3\end{aligned}$$

である。

(答) $a_1 = 3, a_2 = 3$

(3)

$$\begin{aligned}b_1 &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(3x \sqrt{\frac{x}{x-1}} - 3x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} 3x \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} + 1} \cdot \frac{3}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{3}{2} \\ b_2 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(3x \sqrt{\frac{x}{x-1}} - 3x \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x \left(\sqrt{\frac{x}{x-1}} - 1 \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x \frac{1}{\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{x}}} + 1} \cdot \frac{3}{1-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

である。

(答) $b_1 = \frac{3}{2}, b_2 = \frac{3}{2}$

(4)

(1)で求めた定義域に注意し、 $f(x)$ の導関数を求めると、

$$\begin{aligned}f'(x) &= 3\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 3x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \left(\frac{x}{x-1} \right)' \\ &= 3\sqrt{\frac{x}{x-1}} + 3x \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{(x-1)-x}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3x}{2} \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{2(x-1)-1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{3}{2} x \sqrt{\frac{x-1}{x}} \cdot \frac{2x-3}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

となる。よって、次の増減表を得る。

x	$\cdots$	0	$(\cdots)$	(1)	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	+		$\searrow$	$\searrow$	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$\frac{9\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$

増減表より、 $f(x)$ の極小値は $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9\sqrt{3}}{2}$ である。

(答) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

(5)

(3)の結果より、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - 3x) &= \frac{3}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - 3x) &= \frac{3}{2}\end{aligned}$$

であり、また

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$$

であるから、曲線 $y = f(x)$ の漸近線の方程式は

$$y = 3x + \frac{3}{2}, x = 1$$

である。

(答) $y = 3x + \frac{3}{2}, x = 1$

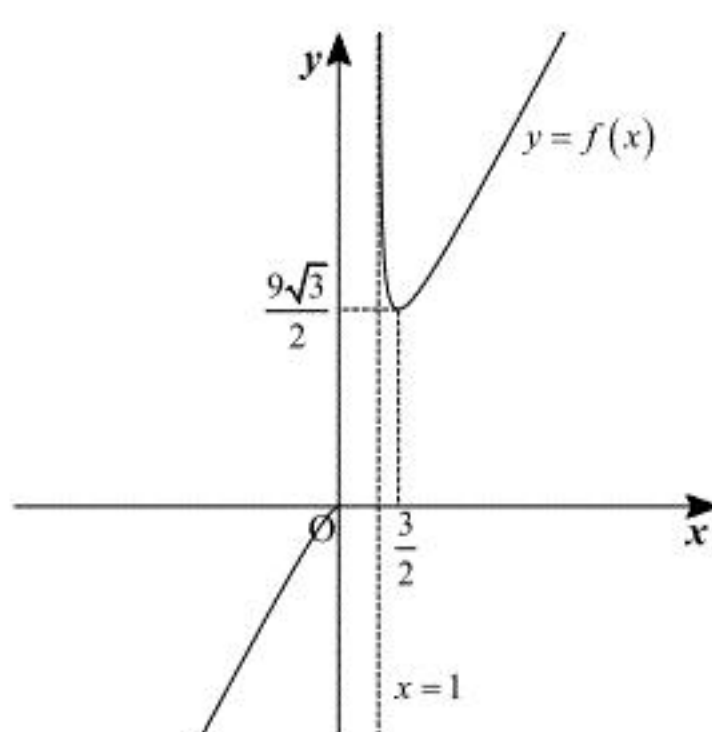
(6)

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

であるから、これと(4)で求めた増減表より、曲線 $y = f(x)$ のグラフは以下のようになる。



よって、このグラフと直線 $y = k$ の交点を考えることにより、方程式 $f(x) = k$ の解の個数は、

$$\begin{cases} k \leq 0 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ k = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ \frac{9\sqrt{3}}{2} < k \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$$

であることが分かる。

(答) $\begin{cases} k \leq 0 \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ 0 < k < \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } 0 \text{ 個} \\ k = \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ のとき, } 1 \text{ 個} \\ \frac{9\sqrt{3}}{2} < k \text{ のとき, } 2 \text{ 個} \end{cases}$