

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ							
	2	5	2	7	1	5	2	7	1	5							
(2)	サ	シ	ス	セ	ソ	タ											
	1	2	9	0	3	0											
(3)	チ	ツ	テ														
	8	6	8														
(4)	ト	ナ	ニ								ヌ						
	5	6	9								0						
(5)	ネ	ノ	ハ														
	1	2	2														
(6)	あ	ひ															
	ー	2															

【解説】

- (1) pa_n を3で割ったときの余りを r_n とおくと、 r_n は0, 1, 2のいずれかの数であり、 $pa_n - r_n$ は3の倍数となる。したがって $b_n = r_n$ であるから、 b_n は pa_n を3で割ったときの余りに等しい。
 $p=8$ のとき、 $pa_1 = 8 \cdot 1 = 8$ であるから、 $b_1 = 2$ となる。同様にして、
- $$a_2 = \frac{1}{3}(1 - 8 \cdot 2) = -5$$
- $$pa_2 = 8 \cdot (-5) = -40$$
- より $b_2 = 2$ となり、
- $$a_3 = \frac{1}{3}(-5 - 8 \cdot 2) = -7$$
- $$pa_3 = 8 \cdot (-7) = -56$$
- より $b_3 = 1$ となり、さらに
- $$a_4 = \frac{1}{3}(-7 - 8 \cdot 1) = -5$$
- $$pa_4 = 8 \cdot (-5) = -40$$
- より $b_4 = 2$ となる。ここで、
- $$(a_2, b_2) = (a_4, b_4) = (-5, 2)$$
- であり、 p が一定であれば (a_n, b_n) は (a_{n-1}, b_{n-1}) の値のみに依存して決まることから、 $n \geq 4$ において帰納的に
- $$(a_n, b_n) = (a_{n-2}, b_{n-2})$$
- となることが分かる。以上より、
- $$(a_5, b_5) = (a_3, b_3) = (-7, 1)$$
- $$(a_6, b_6) = (a_4, b_4) = (-5, 2)$$
- である。
- (2) (1)と同様に、順次 (a_n, b_n) の値を求めると、
- $$pa_1 = (-13) \cdot 1 = -13$$
- より $b_1 = 2$ となり、
- $$a_2 = \frac{1}{3}\{1 - (-13) \cdot 2\} = 9$$
- $$pa_2 = (-13) \cdot 9 = -13 \cdot 3 \cdot 3$$
- より $b_2 = 0$ となり、
- $$a_3 = \frac{1}{3}\{9 - (-13) \cdot 0\} = 3$$
- $$pa_3 = (-13) \cdot 3$$
- より $b_3 = 0$ となり、
- $$a_4 = \frac{1}{3}\{3 - (-13) \cdot 0\} = 1$$
- $$pa_4 = (-13) \cdot 1 = -13$$
- より $b_4 = 2$ となる。したがって、
- $$(a_4, b_4) = (a_1, b_1) = (1, 2)$$
- であるから、(1)と同様にして、 $n \geq 4$ において帰納的に
- $$(a_n, b_n) = (a_{n-3}, b_{n-3})$$
- となることが分かる。以上より、
- $$(a_{190}, b_{190}) = (a_{3 \cdot 63 + 1}, b_{3 \cdot 63 + 1}) = (a_1, b_1) = (1, 2)$$
- $$(a_{191}, b_{191}) = (a_{3 \cdot 63 + 2}, b_{3 \cdot 63 + 2}) = (a_2, b_2) = (9, 0)$$
- $$(a_{192}, b_{192}) = (a_{3 \cdot 63 + 3}, b_{3 \cdot 63 + 3}) = (a_3, b_3) = (3, 0)$$
- である。
- (3) $200 = 3 \cdot 66 + 2$ であるから、(2)の結果を利用すると、
- $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{200} a_k &= \sum_{k=1}^{66} (a_{3k-2} + a_{3k-1} + a_{3k}) + a_{199} + a_{200} \\ &= \sum_{k=1}^{66} (a_1 + a_2 + a_3) + a_1 + a_2 \\ &= 66 \cdot (1 + 9 + 3) + 1 + 9 \\ &= 868 \end{aligned}$$
- となる。
- (4) $30 = 3 \cdot 10$ であるから、(2)の結果を利用すると、
- $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{30} k^2 b_k &= \sum_{k=1}^{10} \{(3k-2)^2 b_{3k-2} + (3k-1)^2 b_{3k-1} + (3k)^2 b_{3k}\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{(3k-2)^2 b_1 + (3k-1)^2 b_2 + (3k)^2 b_3\} \\ &= \sum_{k=1}^{10} \{(3k-2)^2 \cdot 2 + (3k-1)^2 \cdot 0 + (3k)^2 \cdot 0\} \\ &= 2 \sum_{k=1}^{10} (9k^2 - 12k + 4) \\ &= 2 \cdot \left\{ 9 \cdot \frac{1}{6} \cdot 10 \cdot 11 \cdot 21 - 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 11 + 4 \cdot 10 \right\} \\ &= 5690 \end{aligned}$$
- となる。
- (5) $p = 3^{11} + 1$ のとき、
- $$pa_1 = (3^{11} + 1) \cdot 1 = 3^{11} + 1$$
- より $b_1 = 1$ となり、
- $$a_2 = \frac{1}{3}\{1 - (3^{11} + 1) \cdot 1\} = -3^{10}$$
- となる。ここで、 a_{n-1} が3の倍数であるとき、 pa_{n-1} も3の倍数であるから、 $b_{n-1} = 0$ となり、
- $$a_n = \frac{1}{3}\{a_{n-1} - p \cdot 0\} = \frac{a_{n-1}}{3}$$
- となることが分かる。これを利用すると、
- $$b_2 = 0$$
- $$a_3 = \frac{-3^{10}}{3} = -3^9$$
- となり、同様にして計算を進めると、 $3 \leq k \leq 11$ について
- $$a_k = -3^{12-k}, b_k = 0$$
- となり、
- $$a_{12} = \frac{a_{11}}{3} = -1$$
- $$pa_{12} = (3^{11} + 1) \cdot (-1) = -3^{11} - 1$$
- から、
- $$b_{12} = 2$$
- となる。以上より、数列 $\{b_n\}$ の第2項目以降で0でない値が初めて出てくるのは第12項目であり、その項の値は2であることが分かる。
- (6) まず、 $p = -2$ のときに数列 $\{b_n\}$ のすべての項が1となることを示す。
- $$pa_1 = (-2) \cdot 1 = -2$$
- より $b_1 = 1$ となり、
- $$a_2 = \frac{1}{3}\{1 - (-2) \cdot 1\} = 1$$
- $$pa_1 = (-2) \cdot 1 = -2$$
- より $b_2 = 1$ となる。したがって、
- $$(a_2, b_2) = (a_1, b_1) = (1, 1)$$
- であるから、(1), (2)と同様にして、 $n \geq 2$ において帰納的に
- $$\begin{aligned} (a_n, b_n) &= (a_{n-1}, b_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= (a_1, b_1) \\ &= (1, 1) \end{aligned}$$
- となる。したがって、 $p = -2$ のとき数列 $\{b_n\}$ のすべての項は1となる。次に、 $|p| \leq 2$ を満たす p について、数列 $\{b_n\}$ のすべての項が1となるものは $p = -2$ 以外に存在しないことを示す。
- [1] $p = 0$ のとき
- 与えられた条件より、 p は3で割り切れない整数でなければならない。したがって、 $p = 0$ は不適である。
- [2] $p = 1$ のとき
- $$pa_1 = 1 \cdot 1 = 1$$
- より $b_1 = 1$ となるが、
- $$a_2 = \frac{1}{3} \cdot (1 - 1 \cdot 1) = 0$$
- $$pa_2 = 1 \cdot 0 = 0$$
- より $b_2 = 0$ となるので、不適である。
- [3] $p = -1$ のとき
- $$pa_1 = -1 \cdot 1 = -1$$
- より $b_1 = 2$ となるので、不適である。
- [4] $p = 2$ のとき、
- $$pa_1 = 2 \cdot 1 = 2$$
- より $b_1 = 2$ となるので、不適である。
- 以上[1][2][3][4]より、 $|p| \leq 2$ を満たす p について、数列 $\{b_n\}$ のすべての項が1となるものは $p = -2$ 以外に存在しないことが示された。したがって、数列 $\{b_n\}$ のすべての項が1となるような整数 p で絶対値が最小となるものは $p = -2$ である。

2

(1)

まず, $\vec{b}_s = (\sqrt{1-s^2}, -s)$, $\vec{c}_s = (s\sqrt{1+s^2}, \sqrt{1-s^4})$ より

$$\begin{aligned} |\vec{b}_s| &= \sqrt{(\sqrt{1-s^2})^2 + (-s)^2} = 1 \\ |\vec{c}_s| &= \sqrt{(s\sqrt{1+s^2})^2 + (\sqrt{1-s^4})^2} = \sqrt{1+s^2} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} (f_i(s), g_i(s)) &= \vec{a}_s + \frac{t}{|\vec{b}_s|} \vec{b}_s \\ &= (s, \sqrt{1-s^2}) + t(\sqrt{1-s^2}, -s) \\ &= (s+t\sqrt{1-s^2}, \sqrt{1-s^2}-ts) \\ (h_i(s), k_i(s)) &= \vec{a}_s - \frac{t}{|\vec{c}_s|} \vec{c}_s \\ &= (s, \sqrt{1-s^2}) - \frac{t}{\sqrt{1+s^2}}(s\sqrt{1+s^2}, \sqrt{1-s^4}) \\ &= ((1-t)s, (1-t)\sqrt{1-s^2}) \end{aligned}$$

となる。よって, $f_i(s), g_i(s), h_i(s), k_i(s)$ は s, t を用いて

$$f_i(s) = s+t\sqrt{1-s^2}, g_i(s) = \sqrt{1-s^2}-ts, h_i(s) = (1-t)s, k_i(s) = (1-t)\sqrt{1-s^2}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) f_i(s) = s+t\sqrt{1-s^2}, g_i(s) = \sqrt{1-s^2}-ts, h_i(s) = (1-t)s, k_i(s) = (1-t)\sqrt{1-s^2}$$

(2)

$\vec{a}_s, \vec{b}_s$ はどちらも $\vec{0}$ になることはなく, 内積 $\vec{a}_s \cdot \vec{b}_s$ を計算すると

$$\vec{a}_s \cdot \vec{b}_s = (s, \sqrt{1-s^2}) \cdot (\sqrt{1-s^2}, -s) = s\sqrt{1-s^2} - s\sqrt{1-s^2} = 0$$

となるから, $\vec{a}_s, \vec{b}_s$ は直交し, なす角は $\frac{\pi}{2}$ であることがわかる。また, $\vec{a}_s, \vec{c}_s$ もどちらも $\vec{0}$ になることはなく, $\vec{c}_s$ は $\vec{a}_s$ を用いて

$$\vec{c}_s = (s\sqrt{1+s^2}, \sqrt{1-s^4}) = \sqrt{1+s^2} (s, \sqrt{1-s^2}) = \sqrt{1+s^2} \vec{a}_s$$

と表すことができ, $\sqrt{1+s^2} > 0$ であることから, $\vec{a}_s, \vec{b}_s$ は平行であり, なす角は 0 であることがわかる。

$$(\text{答}) \vec{a}_s, \vec{b}_s \text{ がなす角: } \frac{\pi}{2}, \vec{a}_s, \vec{c}_s \text{ がなす角: } 0$$

(3)

(1)の結果より, $f_i(s)^2 + g_i(s)^2$ の値は, t を用いて

$$\begin{aligned} f_i(s)^2 + g_i(s)^2 &= (s+t\sqrt{1-s^2})^2 + (\sqrt{1-s^2}-ts)^2 \\ &= s^2 + 2ts\sqrt{1-s^2} + t^2(1-s^2) + (1-s^2) - 2ts\sqrt{1-s^2} + t^2s^2 \\ &= 1+t^2 \end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) f_i(s)^2 + g_i(s)^2 = 1+t^2$$

(4)

s は $-\frac{1}{2} \leq s \leq 1$ の範囲を動くから

$$s = \sin \theta \quad \left(-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

と変数変換することにする。このとき, s は θ に関して単調増加し, 区間 $-\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ では θ と s は1対1対応することに注意する。このとき, $f_i(s), g_i(s)$ は

$$f_i(s) = \sin \theta + t \cos \theta \quad (\because -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \theta \geq 0)$$

$$g_i(s) = \cos \theta - t \sin \theta \quad (\because -\frac{\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ より } \cos \theta \geq 0)$$

と表すことができ, さらに実数 α_t を

$$\cos \alpha_t = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \sin \alpha_t = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \quad 0 \leq \alpha_t < 2\pi$$

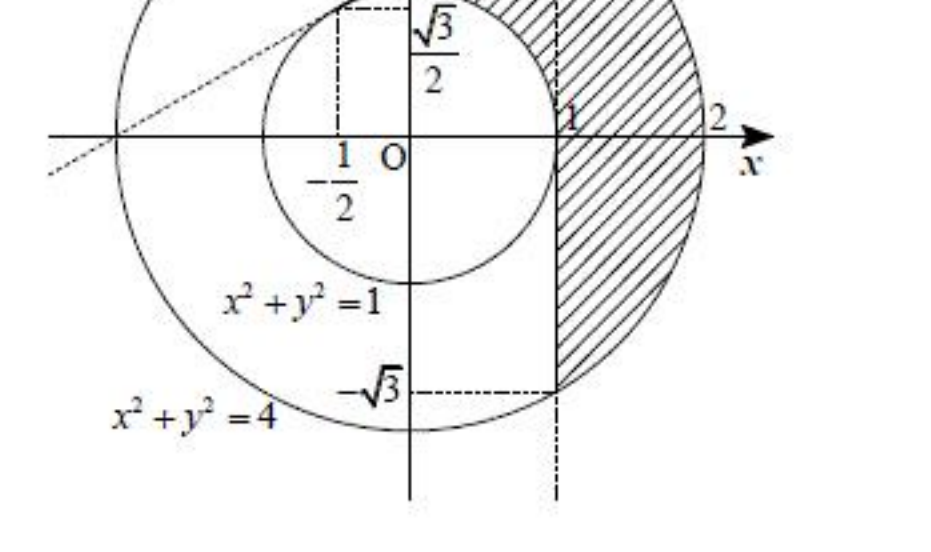
を満たすものとする, 三角関数の加法定理を逆に用いることで,

$$f_i(s) = \sqrt{1+t^2} \left\{ \cos(-\theta) \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} - \sin(-\theta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right\} = \sqrt{1+t^2} \cos(-\theta + \alpha_t)$$

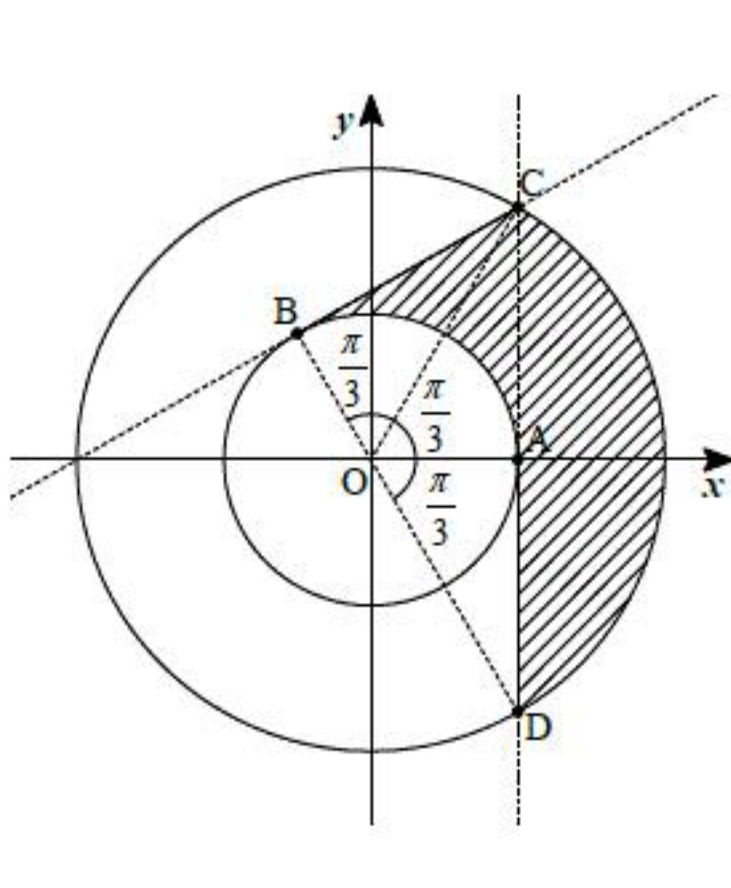
$$g_i(s) = \sqrt{1+t^2} \left\{ \sin(-\theta) \cdot \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} + \cos(-\theta) \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \right\} = \sqrt{1+t^2} \sin(-\theta + \alpha_t)$$

と表すことができる。よって, $t(0 \leq t \leq \sqrt{3})$ を固定して, θ のみ $-\frac{\pi}{6}$ から $\frac{\pi}{2}$ まで動かすと,

C_t は以下の図の太線部のような曲線(円の一部)を表すことがわかる。ただし, $(f_i(s), g_i(s))$ が表す点を $P_t(s)$ とした。



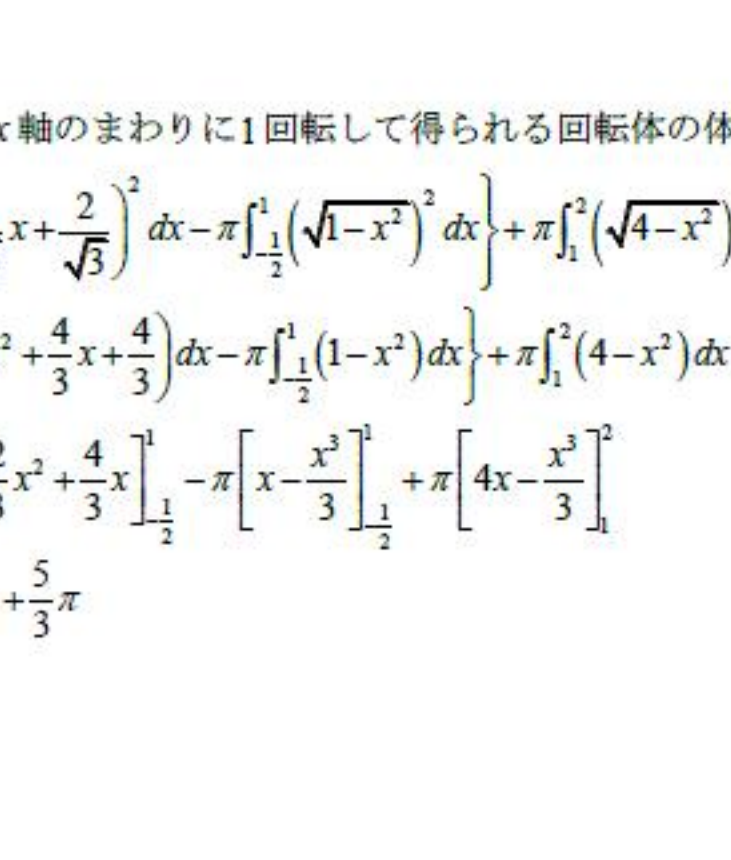
したがって, t が 0 から $\sqrt{3}$ まで動くとき, C_t が通過する部分 D を図示すると, 以下の図の斜線部のようにになる。ただし, 境界をすべて含む。



(答) 前図(ただし, 境界をすべて含む)

(5)

下図のように, 点 A, B, C, D を定める。



このとき, 斜線部 D の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= (\triangle OAC + \triangle OBC - \text{扇形 OAB}) + (\text{扇形 ODC} - \triangle ODC) \\ &= \text{扇形 ODC} - \text{扇形 OAB} \quad (\because \triangle OAC = \triangle OBC = \triangle ODA) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3} 2^2 \pi - \frac{1}{3} 1^2 \pi$$

$$= \pi$$

と求まる。

(答) π

(6)

(4)の結果より, D を x 軸のまわりに1回転して得られる回転体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \left\{ \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{2}{\sqrt{3}} \right)^2 dx - \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (\sqrt{1-x^2})^2 dx \right\} + \pi \int_1^2 (\sqrt{4-x^2})^2 dx \\ &= \left\{ \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} \right) dx - \pi \int_{-\frac{1}{2}}^1 (1-x^2) dx \right\} + \pi \int_1^2 (4-x^2) dx \\ &= \pi \left[\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2 + \frac{4}{3}x \right]_{-\frac{1}{2}}^1 - \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{1}{2}}^1 + \pi \left[4x - \frac{x^3}{3} \right]_1^2 \\ &= \frac{21}{8}\pi - \frac{9}{8}\pi + \frac{5}{3}\pi \\ &= \frac{19}{6}\pi \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{19}{6}\pi$

(7)

(1)の結果より,

$$(h_i(s), k_i(s)) = (1-t)(s, \sqrt{1-s^2})$$

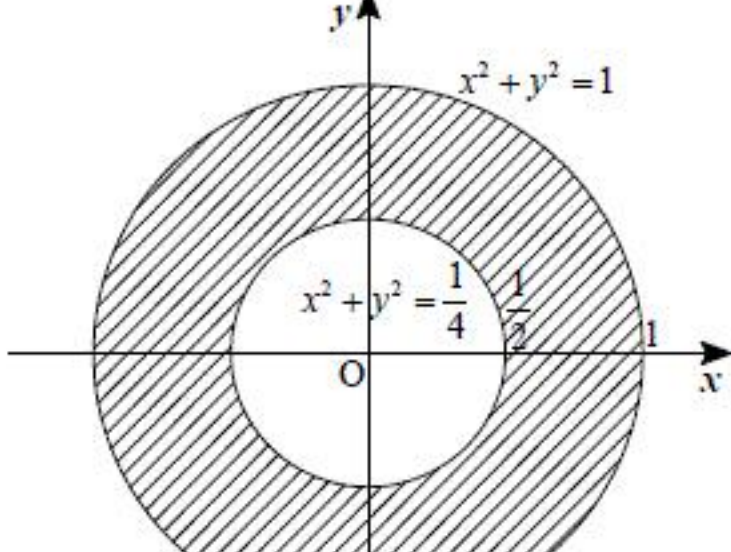
であるから, K_t は

$1-t > 0$ のとき, K_0 を原点を中心に $1-t$ 倍拡大した図形

$1-t = 0$ のとき, 原点

$1-t < 0$ のとき, $K_{|t|-0}$ を原点に関して対称移動した図形

を表すことがわかる。ここで, K_0 は xy 平面上において中心が原点, 半径1の円の $y \geq 0$ の部分を表すことから, $K_{\frac{1}{2}}, K_1, K_{\frac{3}{2}}$ を図示すると以下の図のようにになる。ただし, 端点をすべて含む。



(答) 前図(ただし, 端点をすべて含む)

(8)

$\frac{1}{2} \leq |t-1| \leq 1$ を変形すると

$$\frac{1}{2} \leq |t-1| \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq |1-t| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq 1-t \leq -\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{2} \leq 1-t \leq 1$$

となるから, (7)における考察より, K_t が通過する部分は以下の図の斜線部のようになることがわかる。

したがって, この部分の面積は

$$\pi^2 - \pi \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{3}{4}\pi$$

である。

(答) $\frac{3}{4}\pi$