

【解答】

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	
		1	4	1	4	1	1	1	6	3	8	
		サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	
		1	4	1	4	1	1	1	6	3	8	
(2)		ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	
		1	1	3	1	1	2	1	1	6	2	
(3)	(a)	マ	ミ	ム	メ	モ	ヤ					
		1	2	1	4	1	4					
	(b)	ユ										
		1										
	(c)	ヨ	ラ	リ	ル							
		1	2	1	4							
	(d)	レ	ロ	ワ	ヲ	ン	あ	い	う	え	お	
		2	3	1	4	1	3	1	3	1	4	
		か	き	く	け	こ	さ	し	す			

【解説】

(1)

関数 $f(x) = 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{4}$ を微分すると

$$f'(x) = 16x^3 + 24x^2 + 6x - 2 = 2(x+1)(8x^2 + 4x - 1)$$

となるから、 $f(x)$ の増減は以下のようになる。

x	...	-1	...	$\frac{-1-\sqrt{3}}{4}$	...	$\frac{-1+\sqrt{3}}{4}$	...
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\searrow$	極小	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ここで $f(-1) = \frac{5}{4}$ であり、多項式 $f(x)$ を多項式 $8x^2 + 4x - 1$ で多項式の割り算をすると

$$f(x) = (8x^2 + 4x - 1) \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{16} \right) - \frac{3}{2}x + \frac{5}{16}$$

となることから、 $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$ の値は

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right) = -\frac{3}{2}\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right) + \frac{5}{16} = \frac{11}{16} - \frac{3}{8}\sqrt{3}$$

と求まる。また、 $f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{4}\right)$ と $f(-1)$ の値について

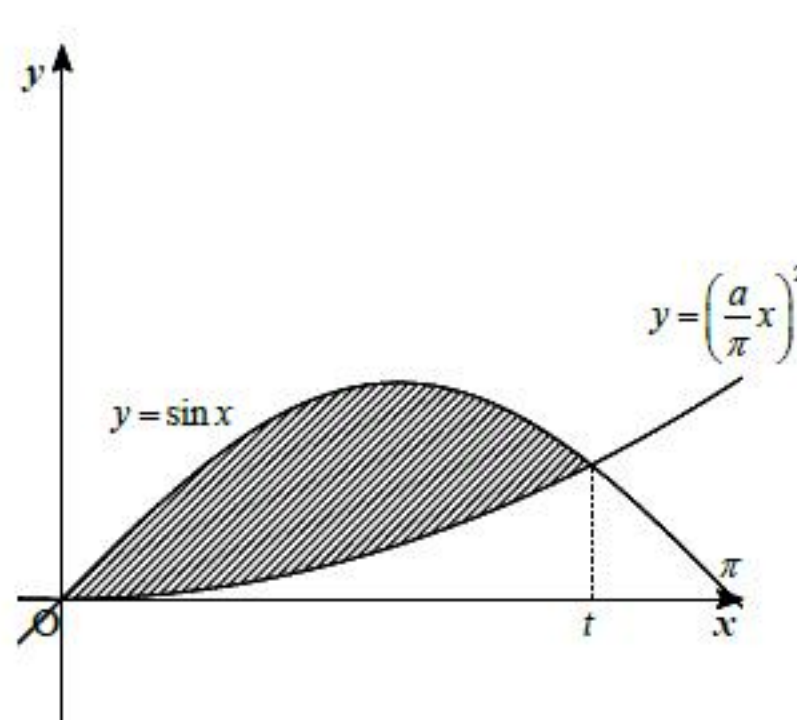
$$\frac{11-6\sqrt{3}}{16} \left(< \frac{5}{16} \right) < \frac{5}{4} \left(\because 1 < \sqrt{3} < 2 \right)$$

であることから、 $f(x)$ は $x = \frac{-1+\sqrt{3}}{4}$ のとき最小値 $\frac{11-6\sqrt{3}}{16}$ をとることがわかる。さらに、

$$f(-x) = g(x)$$

であるから、 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフは y 軸対称となるため、 $g(x)$ は $x = \frac{1-\sqrt{3}}{4}$ のとき最小値 $\frac{11-6\sqrt{3}}{16}$ をとることがわかる。

(2)

区間 $0 \leq x \leq t$ において、 $\sin x \geq \left(\frac{a}{\pi}x\right)^2$ であることから、面積 S は

$$S = \int_0^t \left\{ \sin x - \left(\frac{a}{\pi}x\right)^2 \right\} dx = \left[-\cos x - \frac{a^2}{3\pi^2}x^3 \right]_0^t = 1 - \frac{a^2}{3\pi^2}t^3 - \cos t$$

と表せる。ここで、 t は $\sin t = \left(\frac{a}{\pi}t\right)^2$ を満たすことから

$$S = 1 - \frac{t}{3} \left(\frac{a}{\pi}t\right)^2 - \cos t = 1 - \frac{t}{3} \sin t - \cos t \quad \dots \textcircled{1}$$

であることがわかる。また、 $a = 2$ のとき、区間 $0 \leq x \leq \pi$ において $y = \sin x$ は上に凸、放物線 $y = \left(\frac{a}{\pi}x\right)^2$ は下に凸であるから、上図より2曲線の交点はただ1つ存在し、

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 = \left(\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{2}\right)^2 = 1$$

となるため、 $t = \frac{\pi}{2}$ ($\because 0 \leq \frac{\pi}{2} \leq \pi$) であることがわかる。ここで、 $\sin t = \left(\frac{a}{\pi}t\right)^2$ を変形すると

$$\sin t = \left(\frac{a}{\pi}t\right)^2 \Leftrightarrow a^2 = \pi^2 \frac{\sin t}{t^2}$$

となるから、 $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ の範囲で $\frac{\sin t}{t^2}$ は単調減少関数 ($\because \sin t, t^2 > 0$, $\sin t$ は単調減少関数、 t^2 は単調増加関数) であり、さらに $0 < a \leq 2$ のとき

$$\begin{cases} \text{区間 } 0 < x < \pi \text{ において、} y = \sin x \text{ と } y = \left(\frac{a}{\pi}x\right)^2 \text{ の交点はただ1つ存在} \\ t = \frac{\pi}{2} \text{ のとき、} a = 2 \\ t \rightarrow \pi \text{ のとき、} a \rightarrow 0 \end{cases}$$

より、 $0 < a \leq 2 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ であることがわかる。①より、 S を t で微分すると

$$\frac{dS}{dt} = \frac{2}{3} \sin t - \frac{t}{3} \cos t$$

となり、これは区間 $\frac{\pi}{2} \leq t < \pi$ において常に0以上 ($\because \sin t, t > 0$, $\cos t \leq 0$) であるから、 S は t についての単調増加関数であることがわかる。よって、 S がとりうる値の範囲は

$$1 - \frac{\pi}{6} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \left(= 1 - \frac{\pi}{6} \right) \leq S < 1 - \frac{\pi}{3} \sin \pi - \cos \pi (= 2)$$

と求まる。

(3)(a)

 $a_0 = 1, b_0 = 0, c_0 = 0$ とする。題意より、さいころを振ったとき、同じ部屋の空調の電源をオンにする確率は $\frac{1}{2}$ 、別の二部屋についてはそれぞれ $\frac{1}{4}$ となるから、 $n \geq 0$ において、漸化式

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}(b_n + c_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}(c_n + a_n) \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}c_n + \frac{1}{4}(a_n + b_n) \end{cases} \quad \dots \textcircled{1}$$

が成立する。よって

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4}(0+0) = \frac{1}{2}$$

$$b_1 = c_1 = \frac{1}{4}$$

となる。

(b)

 n 時間後に1, 2, 3号室のいずれかの空調の電源がオンであるから

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

である。

(c)

①より、 $n \geq 0$ のとき

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}(b_n + c_n)$$

が成立する。

(d)

①、②より、数列 $\{a_n\}$ は漸化式

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{4}(1-a_n) = \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \left(a_n - \frac{1}{3} \right)$$

を満たすから、 $a_0 = 1$ であることに注意して、 $n \geq 1$ のとき

$$a_n - \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{4} \right)^n \left(a_0 - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

$$\therefore a_n = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{3}$$

となる。同様にして

$$b_n = c_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{4} \right)^n + \frac{1}{3}$$

を得る。

(1)

一般に、 p, q, r, s を整数とし、 $p+q\sqrt{5}=r+s\sqrt{5}$ が成り立つとする。このとき、

$$\begin{aligned} p+q\sqrt{5} &= r+s\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow p-r &= -(q-s)\sqrt{5} \end{aligned}$$

と変形すると、 $q-s \neq 0$ ならば $\sqrt{5} = -\frac{p-r}{q-s}$ となってしまう、右辺は有理数であるから $\sqrt{5}$ が無理数であることに矛盾する。よって、 $q-s=0$ であり、このとき $p-r=0$ となる。したがって、

$$p, q, r, s \text{ を整数とするとき、 } p+q\sqrt{5}=r+s\sqrt{5} \Rightarrow p=r, q=s \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成立することに注意する。

$n=2$ のとき、 X_2, Y_2 は整数であり

$$X_2+Y_2\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^3=38+17\sqrt{5}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より $X_2=38, Y_2=17$ である。同様にして、

$$V_2-W_2\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^3=38-17\sqrt{5}$$

であるから、 $V_2=38, W_2=17$ である。

$$(\text{答}) \quad X_2=38, Y_2=17, V_2=38, W_2=17$$

(2)

$n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} X_{n+1}+Y_{n+1}\sqrt{5} &= (2+\sqrt{5})^{2n+1} \\ &= (2+\sqrt{5})^2 (X_n+Y_n\sqrt{5}) \\ &= (9+4\sqrt{5})(X_n+Y_n\sqrt{5}) \\ &= (9X_n+20Y_n)+(4X_n+9Y_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

と計算でき、ここで $X_{n+1}, Y_{n+1}, 9X_n+20Y_n, 4X_n+9Y_n$ は整数であることから、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} X_{n+1}=9X_n+20Y_n \\ Y_{n+1}=4X_n+9Y_n \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} X_{n+1}=9X_n+20Y_n \\ Y_{n+1}=4X_n+9Y_n \end{cases}$$

(3)

(2)と同様にして、 $n \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} V_{n+1}-W_{n+1}\sqrt{5} &= (2-\sqrt{5})^{2n+1} \\ &= (2-\sqrt{5})^2 (V_n-W_n\sqrt{5}) \\ &= (9-4\sqrt{5})(V_n-W_n\sqrt{5}) \\ &= (9V_n+20W_n)-(4V_n+9W_n)\sqrt{5} \end{aligned}$$

と計算でき、ここで $V_{n+1}, W_{n+1}, 9V_n+20W_n, 4V_n+9W_n$ は整数であることから、 $\textcircled{1}$ より

$$\begin{cases} V_{n+1}=9V_n+20W_n \\ W_{n+1}=4V_n+9W_n \end{cases}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \begin{cases} V_{n+1}=9V_n+20W_n \\ W_{n+1}=4V_n+9W_n \end{cases}$$

(4)

点列 (X_n, Y_n) と点列 (V_n, W_n) について、 $n=1$ のとき

$$(X_1, Y_1) = (2, 1), (V_1, W_1) = (2, 1)$$

であり、(2), (3)の結果より、 $n \geq 1$ のとき、漸化式

$$\begin{cases} X_{n+1}=9X_n+20Y_n \\ Y_{n+1}=4X_n+9Y_n \end{cases}, \begin{cases} V_{n+1}=9V_n+20W_n \\ W_{n+1}=4V_n+9W_n \end{cases}$$

によって定まることから、これら2つの点列は同じであることがわかる。よって、

$$X_n=V_n, Y_n=W_n$$

であることから、 $n \geq 1$ のとき

$$X_n+Y_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2n-1}, X_n-Y_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^{2n-1}$$

が成り立つことがわかる。これら2式の両辺を、それぞれかけあわせることで

$$\begin{aligned} X_n^2-5Y_n^2 &= (X_n+Y_n\sqrt{5})(X_n-Y_n\sqrt{5}) \\ &= (2+\sqrt{5})^{2n-1}(2-\sqrt{5})^{2n-1} \\ &= (-1)^{2n-1} \\ &= -1 \end{aligned}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad X_n^2-5Y_n^2=-1$$

(5)

(4)における考察より、

$$\begin{cases} X_n+Y_n\sqrt{5}=(2+\sqrt{5})^{2n-1} \\ X_n-Y_n\sqrt{5}=(2-\sqrt{5})^{2n-1} \end{cases}$$

であることから、数列 $\{X_n\}, \{Y_n\}$ の一般項は

$$\begin{cases} X_n = \frac{1}{2} \left\{ (2+\sqrt{5})^{2n-1} + (2-\sqrt{5})^{2n-1} \right\} \\ Y_n = \frac{1}{2\sqrt{5}} \left\{ (2+\sqrt{5})^{2n-1} - (2-\sqrt{5})^{2n-1} \right\} \end{cases}$$

と求まる。よって、 $\frac{X_n}{Y_n}$ の値は

$$\frac{X_n}{Y_n} = \sqrt{5} \cdot \frac{(2+\sqrt{5})^{2n-1} + (2-\sqrt{5})^{2n-1}}{(2+\sqrt{5})^{2n-1} - (2-\sqrt{5})^{2n-1}} = \sqrt{5} \cdot \frac{1 + \left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right)^{2n-1}}{1 - \left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right)^{2n-1}}$$

であり、ここで $\left| \frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right| < 1$ であることから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2-\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}} \right)^{2n-1} = 0$ である。したがって、求める極限值は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \sqrt{5}$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{X_n}{Y_n} = \sqrt{5}$$

3

(1)

放物線 C_1, C_2 の方程式をそれぞれ

$$C_1: y = h_1(x), C_2: y = h_2(x)$$

とおくと、題意より、

$$h_1(x) = 2x^2 + 2x + \frac{1}{2}, h_2(x) = -2x^2 + 2x + \frac{3}{2}$$

である。これらの導関数を求めると、

$$h_1'(x) = 4x + 2, h_2'(x) = -4x + 2$$

となるから、 C_1 の点 A における接線の傾きと C_2 の点 B における接線の傾きはそれぞれ

$$h_1'(t) = 4t + 2, h_2'(s) = -4s + 2$$

となる。以上より、 C_1 の点 A における接線の傾きと C_2 の点 B における接線の傾きが等しくなるための必要十分条件は、

$$4t + 2 = -4s + 2$$

$$\therefore t + s = 0$$

であることがわかる。

(答) $t + s = 0$

(2)

$t + s = 0$ のとき、 $t = 0 \Leftrightarrow t - s = 0$ であることに注意する。

[1] $t \neq 0$ のとき

直線 AB の方程式を求めると、(1)の結果より $s = -t$ であるから、

$$\begin{aligned} y &= \frac{\left(2t^2 + 2t + \frac{1}{2}\right) - \left(-2s^2 + 2s + \frac{3}{2}\right)}{t - s} (x - t) + 2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\left(2t^2 + 2t + \frac{1}{2}\right) - \left(-2(-t)^2 + 2(-t) + \frac{3}{2}\right)}{t - (-t)} (x - t) + 2t^2 + 2t + \frac{1}{2} \\ &= \frac{4t^2 + 4t - 1}{2t} x + 1 \end{aligned}$$

となる。このとき、 $t = -1, 1$ を代入すれば、これら 2 直線の交点は点 $(0, 1)$ であるから、点 M の候補として点 $(0, 1)$ のみが考えられる。逆に、任意の $t (\neq 0)$ に対して、この直線は点 $(0, 1)$ を通るから、 $t + s = 0$ かつ $t \neq 0$ のとき、直線 AB は共通の点 $(0, 1)$ を通る。

[2] $t = 0$ のとき

(1)で求めた条件より、 $s = t = 0$ である。このとき、点 A, B の座標をそれぞれ求めると、

$$A\left(0, \frac{1}{2}\right), B\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

であるから、直線 AB は y 軸に一致する。したがって、この直線は点 $(0, 1)$ を通る。以上[1][2]より、(1)の条件を満たすようなどんな実数 t, s に対しても、直線 AB は必ず点 $M(0, 1)$ を通過することがわかる。

(答) $M(0, 1)$

(3)

(2)の結果より、点 $M(0, 1)$ を中心とし、半径 r_1 の円 $x^2 + (y - 1)^2 = r_1^2$ ($r_1 > 0$) と、放物線

$C_1: y = h_1(x)$ がただ 1 つの共有点をもつような r_1 の値と、そのときの共有点の x 座標を求めればよい。ここで、2 式を連立して同値変形すると、1で定義された関数 $f(x)$ を用いること

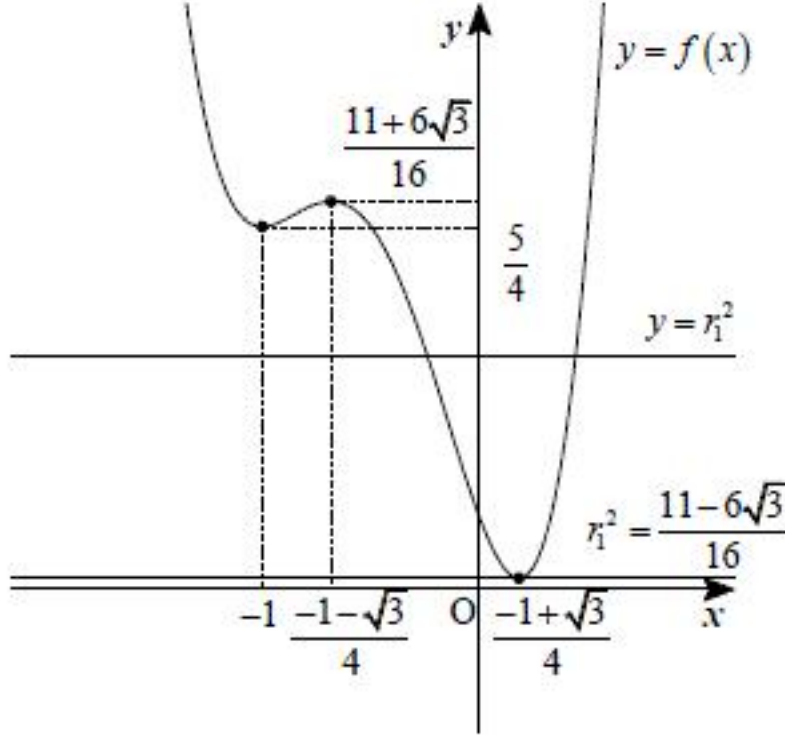
で

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = r_1^2 \\ y = h_1(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(2x^2 + 2x - \frac{1}{2}\right)^2 = r_1^2 \\ y = h_1(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 2x + \frac{1}{4} = r_1^2 \\ y = h_1(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = r_1^2 \\ y = h_1(x) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって問題は、 x に関する方程式 $f(x) = r_1^2$ がただ 1 つの解をもつような r_1 の値と、そのときの解 x を求めることに帰着する。ここで1における考察より、 xy 平面上において $y = f(x), y = r_1^2$ の表すグラフは以下の図のようになることがわかるから、求める r_1, x 座標の値は

$$r_1 = \sqrt{\frac{11 - 6\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{4}, x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$$

であることがわかる。



(答) 円の半径: $\frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{4}$, 共有点の x 座標: $\frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$

(4)

(3)と同様にして、点 $M(0, 1)$ を中心とし、半径 r_2 の円 $x^2 + (y - 1)^2 = r_2^2$ ($r_2 > 0$) と、放物線

$C_2: y = h_2(x)$ の 2 式を連立して同値変形すると、1で定義された関数 $g(x)$ を用いること

で

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x^2 + (y - 1)^2 = r_2^2 \\ y = h_2(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(-2x^2 + 2x + \frac{1}{2}\right)^2 = r_2^2 \\ y = h_2(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 2x + \frac{1}{4} = r_2^2 \\ y = h_2(x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) = r_2^2 \\ y = h_2(x) \end{cases} \end{aligned}$$

となる。よって問題は、 x に関する方程式 $g(x) = r_2^2$ がただ 1 つの解をもつような r_2 の値と、そのときの解 x を求めることに帰着するから、求める r_2, x 座標の値は

$$r_2 = \sqrt{\frac{11 - 6\sqrt{3}}{16}} = \frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{4}, x = \frac{1 - \sqrt{3}}{4}$$

であることがわかる。

(答) 円の半径: $\frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{4}$, 共有点の x 座標: $\frac{1 - \sqrt{3}}{4}$

(5)

(1)の結果より、 $t = -s$ となるとき、線分 AB の長さの 2 乗 AB^2 は、1で定義された関数

$f(x)$ を用いて

$$\begin{aligned} AB^2 &= (t - s)^2 + \left\{ \left(2t^2 + 2t + \frac{1}{2}\right) - \left(-2s^2 + 2s + \frac{3}{2}\right) \right\}^2 \\ &= (t + t)^2 + \left(2t^2 + 2t + \frac{1}{2} + 2t^2 + 2t - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 4 \left(4t^4 + 8t^3 + 3t^2 - 2t + \frac{1}{4}\right) \\ &= 4f(t) \end{aligned}$$

と表される。 t が実数全体を動くとき、1の結果から、 $f(t)$ は $t = \frac{-1 + \sqrt{3}}{4}$ で最小値

$\frac{11 - 6\sqrt{3}}{16}$ をとることがわかる。したがって、線分 AB の長さの 2 乗の最小値は

$$4 \cdot \frac{11 - 6\sqrt{3}}{16} = \frac{11 - 6\sqrt{3}}{4}$$

となり、線分 AB の長さがとり得る値の最小値は、

$$\sqrt{\frac{11 - 6\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{2}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{11 - 6\sqrt{3}}}{2}$