

1

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ	エ				
		0	0	4	2				
(1)	(b)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
		4	2	1	0	0	0	0	
(2)		シ	ス	セ					
		4	2	0					
(3)	(a)	ソ	タ	チ					
		0	2	0					
	(b)	ツ	テ	ト	ナ				
		1	0	1	6				

【解説】

(1)(a)

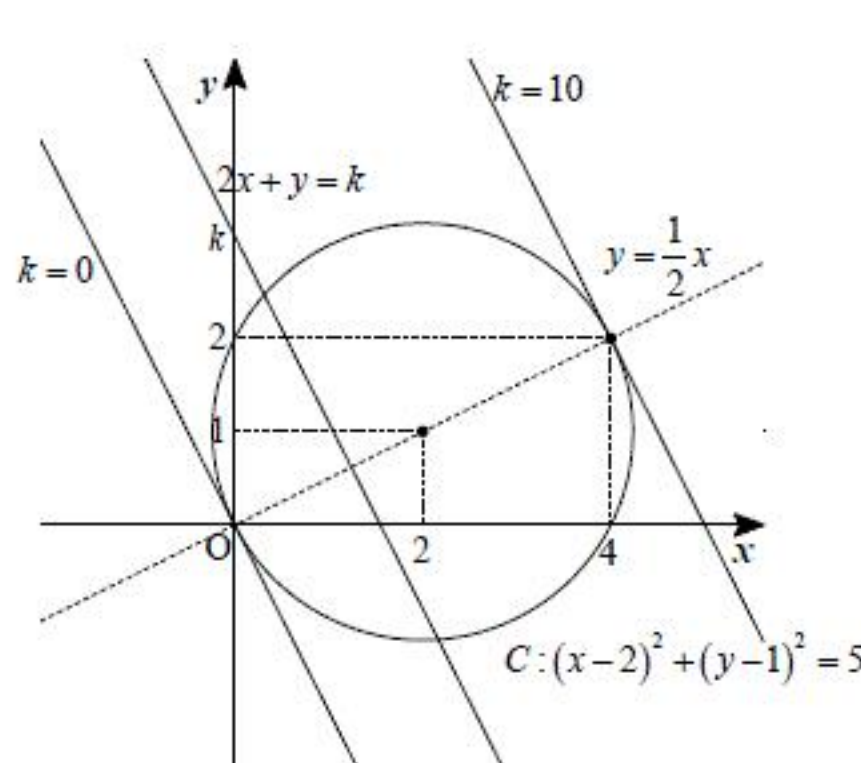
円上の点における接線は、その接点と円の中心を通る直線と直交するから、 C の接線の傾きが -2 となる点は、 C の中心を通り、傾きが $\frac{1}{2}$ の直線と C の交点となる。ここで、 C の中心の座標は $(2, 1)$ であるから、求める点は直線 $y = \frac{1}{2}x$ と円 $C: (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5$ の交点であることがわかり、その座標は

$$\begin{aligned} & \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-2)^2 + \left(\frac{1}{2}x-1\right)^2 = 5 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}x \\ (x-2)^2 = 4 \end{cases} \\ & \therefore (x, y) = (0, 0), (4, 2) \end{aligned}$$

と求まる。

(b)

xy 平面上において、直線 $2x+y=k$ と円 C が共有点をもつという条件のもとで、 k のとりうる値の最大値と最小値を求めればよい。ここで、直線 $2x+y=k$ の傾きは -2 であるから、(1)(a)における考察より、直線と円 C の位置関係は以下の図のようになる。



k は直線 $2x+y=k$ の y 切片を表すから、上図よりこの直線が点 $(4, 2)$ を通るとき、最大となることがわかる。よって、 $(x, y) = (4, 2)$ のとき、最大値

$$k = 2 \cdot 4 + 2 = 10$$

をとることがわかる。また、この直線が点 $(0, 0)$ を通るとき、最小となることがわかるから、 $(x, y) = (0, 0)$ のとき、最小値

$$k = 2 \cdot 0 + 0 = 0$$

をとる。

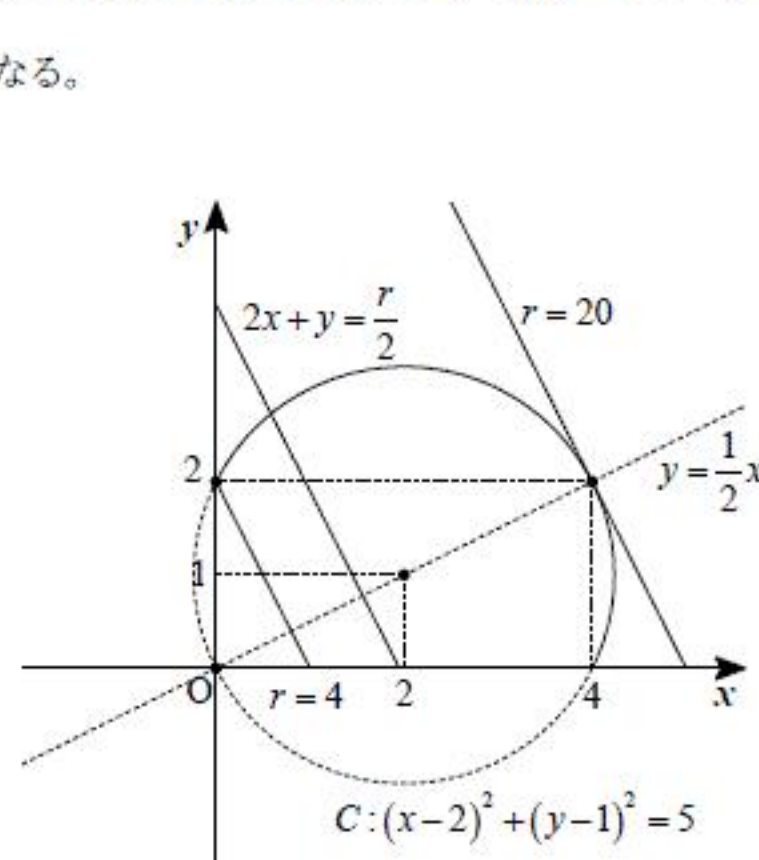
(2)

(1)(b)と同様に考えて、 xy 平面上において、円(および点) $x^2+y^2=r$ ($r \geq 0$)と関係式 $x^2-4|x|+y^2-2|y|=0$ が満たす図形が共有点をもつという条件のもとで、 r のとりうる値の範囲を求めればよい。ここで、点 (x, y) が関係式 $x^2-4|x|+y^2-2|y|=0$ を満たすとき、4つの点 (x, y) , $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ のいずれも関係式 $x^2-4|x|+y^2-2|y|=0$ を満たすから、これが表す図形は x 軸対称であり、 y 軸対称であり、原点对称でもあることがわかる。円 $x^2+y^2=r$ も x 軸対称、 y 軸対称、原点对称である図形であるから、以下 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ の部分で2つの図形が共有点をもつ条件を

考えることにする。さらに、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & \begin{cases} x^2+y^2=r \\ x^2-4x+y^2-2y=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=r \\ x^2-4x+y^2-2y=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=\frac{r}{2} \\ x^2-4x+y^2-2y=0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y=\frac{r}{2} \\ (x-2)^2+(y-1)^2=5 \end{cases} \end{aligned}$$

と同値変形できるから、 xy 平面上において、線分 $2x+y=\frac{r}{2}$ ($x \geq 0, y \geq 0$)と円 C の一部 $(x-2)^2+(y-1)^2=5$ ($x \geq 0, y \geq 0$)が共有点をもつ条件のもとで、 r のとりうる値の範囲を求めればよいことになる。



したがって、(1)(b)と同様に考えれば、上図より、 $r(=x^2+y^2)$ のとりうる値の範囲は

$$2 \cdot 0 + 2 \leq \frac{r}{2} \leq 2 \cdot 4 + 2$$

$$\therefore 4 \leq r \leq 20$$

であることがわかる。

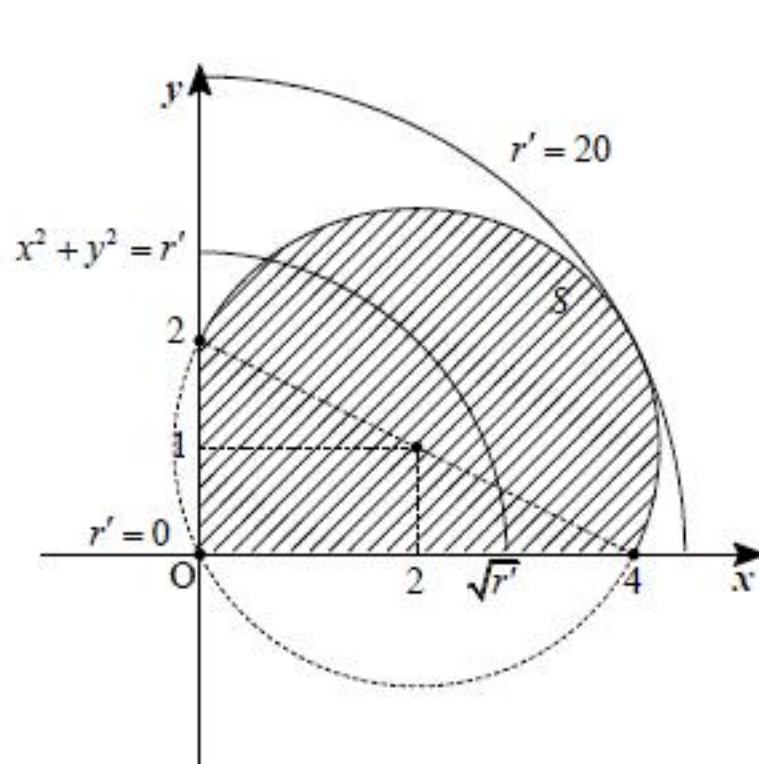
(3)(a)

(2)と同様に考えて、 xy 平面上において不等式 $x^2-4|x|+y^2-2|y| \leq 0$ が表す領域 S は、 x 軸対称、 y 軸対称、原点对称である。また、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} & x^2-4|x|+y^2-2|y| \leq 0 \\ & \Leftrightarrow x^2-4x+y^2-2y \leq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2 \leq 5$$

と同値変形できるから、 $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ において領域 S は以下の図の斜線部のようになる。



$x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ において、円(および点) $x^2+y^2=r'$ ($r' \geq 0$)と領域 S が共有点をもつという条件のもとで、 r' のとりうる値の範囲を求めればよいことになるが、上図と(2)の結果より、 r' のとりうる値の最大値は

$$r' = 20$$

となることがわかる。また、最小値は

$$r' = 0$$

であり、さらに上図より、 r' は区間 $0 \leq r' \leq 20$ の任意の値をとりうるということがわかるから、求める $r'(=x^2+y^2)$ のとりうる値の範囲は

$$0 \leq r' \leq 20$$

である。

(b)

(a)における考察と図より、 S の面積 T は

$$\frac{T}{4} = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{5})^2 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \frac{5}{2}\pi + 4$$

$$\therefore T = 10\pi + 16$$

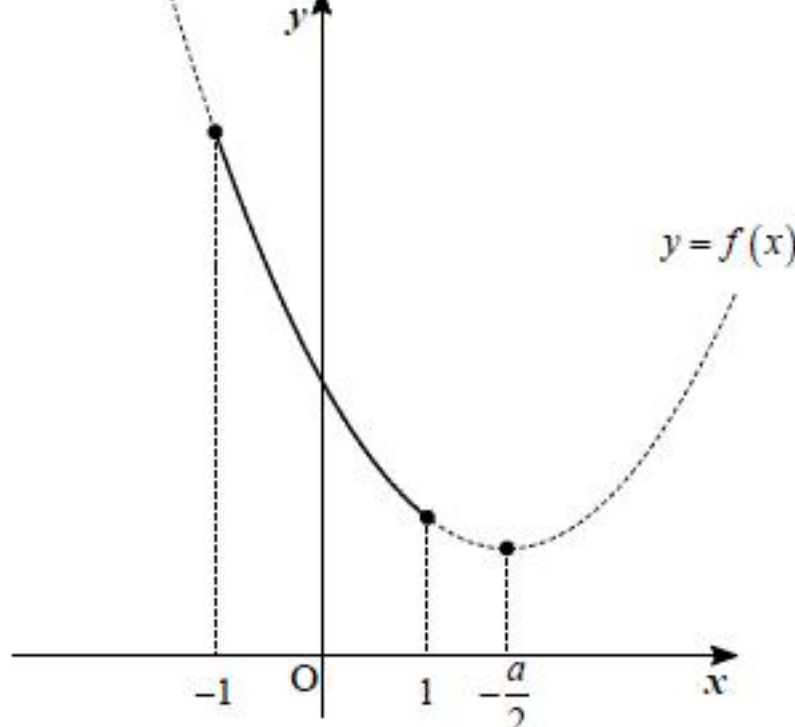
と求まる。

(1)(a)

$$f(x) = x^2 + ax + b$$

$$= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4}$$

より、 $y = f(x)$ のグラフの軸は $x = -\frac{a}{2}$ であるから、軸の位置により場合分けをして考える。

(i) $a \leq -2$ のとき

軸 $x = -\frac{a}{2}$ は $f(x)$ の定義域の右側に存在する。したがって、上図より

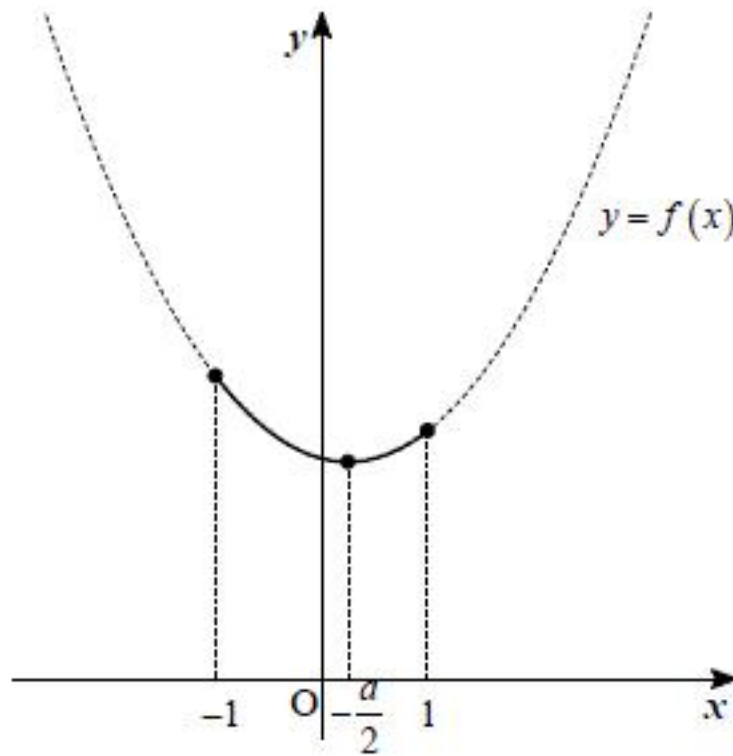
$$M = f(-1)$$

$$= 1 - a + b$$

$$m = f(1)$$

$$= 1 + a + b$$

である。

(ii) $-2 < a < 2$ のとき

軸 $x = -\frac{a}{2}$ は $f(x)$ の定義域内に存在する。したがって上図より、最大値 M は

$$M = \begin{cases} f(1) & (-1 < -\frac{a}{2} \leq 0) \\ f(-1) & (0 < -\frac{a}{2} < 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M = \begin{cases} 1 + a + b & (0 \leq a < 2) \\ 1 - a + b & (-2 < a < 0) \end{cases}$$

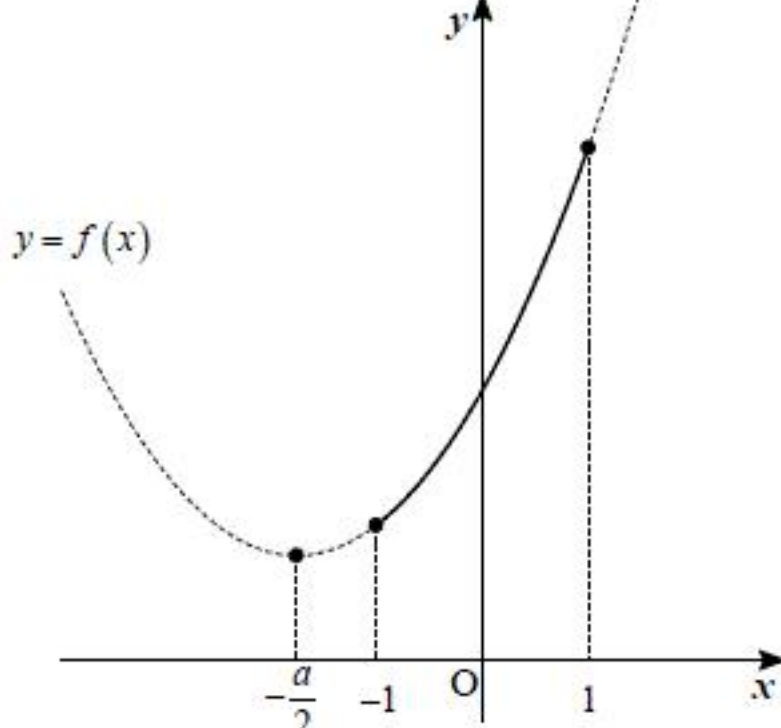
$$\Leftrightarrow M = 1 + |a| + b$$

となり、最小値 m は

$$m = f\left(-\frac{a}{2}\right)$$

$$= b - \frac{a^2}{4}$$

となる。

(iii) $2 \leq a$ のとき

軸 $x = -\frac{a}{2}$ は $f(x)$ の定義域の左側に存在する。したがって、上図より

$$M = f(1)$$

$$= 1 + a + b$$

$$m = f(-1)$$

$$= 1 - a + b$$

である。

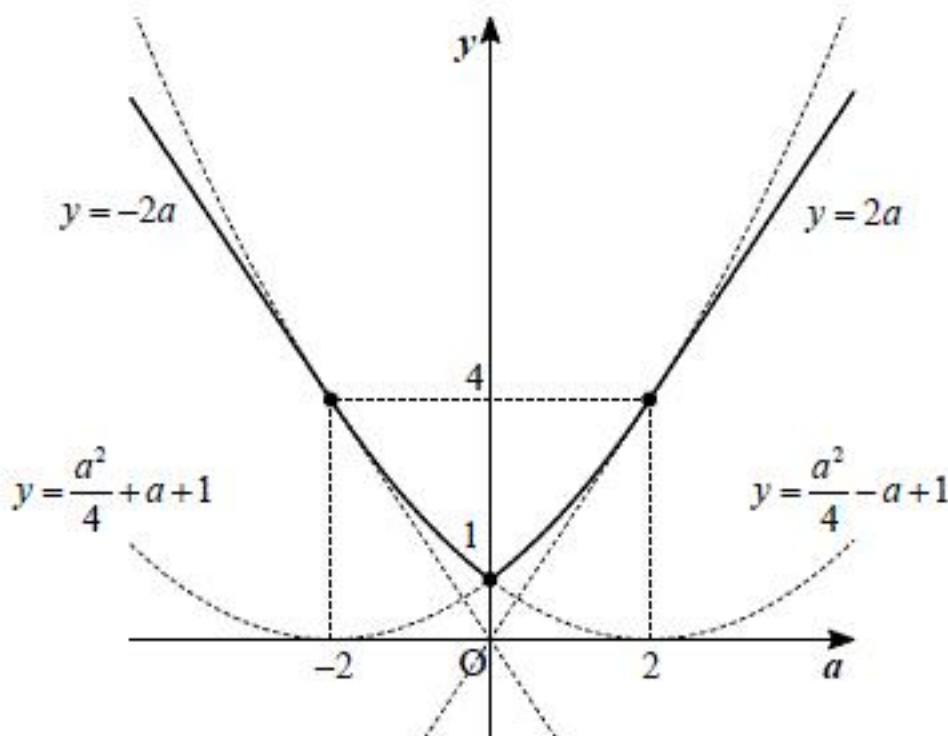
$$(\text{答}) \begin{cases} a \leq -2 \text{ のとき,} & M = 1 - a + b, & m = 1 + a + b \\ -2 < a < 2 \text{ のとき,} & M = 1 + |a| + b, & m = b - \frac{a^2}{4} \\ 2 \leq a \text{ のとき,} & M = 1 + a + b, & m = 1 - a + b \end{cases}$$

(b)

(a)の結果より、

$$M - m = \begin{cases} -2a & (a \leq -2) \\ \frac{a^2}{4} - a + 1 & (-2 < a < 0) \\ \frac{a^2}{4} + a + 1 & (0 \leq a < 2) \\ 2a & (2 \leq a) \end{cases}$$

となるので、 $g(a) = M - m$ とおくと $y = g(a)$ のグラフは以下になる。



したがって、 $M - m$ が最小となるのは $a = 0$ のときであり、このとき

$$M - m = 1$$

である。

(答) $a = 0, M - m = 1$

(2)

$-1 \leq x \leq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を $h(a, b)$ とおくと、

$$m \leq f(x) \leq M$$

より、 $h(a, b)$ は $|M|$ と $|m|$ のうちの大きい方に一致する。したがって、

$$|M| + |m| \leq 2h(a, b) \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つ。また、 $M \leq |M|$ および $-m \leq |m|$ の各辺を足し合わせると、

$$M - m \leq |M| + |m| \quad \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つので、 $g(a) = M - m$ と $h(a, b)$ について、①と②より

$$g(a) \leq |M| + |m| \leq 2h(a, b)$$

という関係式が成り立つ。ここで、一旦 a を固定して考える。①式と②式の等号が同時に成り立つのは、

$$|M| = |m| \quad \text{かつ} \quad |M| = M \quad \text{かつ} \quad |m| = -m$$

$$\Leftrightarrow M + m = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

のときであり、(1)(a)の結果より、 $M + m$ は

$$M + m = (a \text{ の関数}) + 2b$$

の形で表されることから、③を満たすような b が必ず存在する。したがって、 a を固定したと

きの $h(a, b)$ の最小値は $\frac{g(a)}{2}$ であり、(1)(b)の結果より、 $g(a)$ が $a = 0$ で最小値 1 をとること

から、 $h(a, b)$ は $a = 0$ で最小値 $\frac{1}{2}$ をとることが分かる。また、(1)(a)の結果より、 $a = 0$ におい

て、

$$M = 1 + b, m = b$$

であるから、③より

$$M + m = 0$$

$$\Leftrightarrow 2b + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow b = -\frac{1}{2}$$

である。

(答) $a = 0, b = -\frac{1}{2}$, $|f(x)|$ の最大値: $\frac{1}{2}$