

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ													
	1	0	0	1	3	4													
(2)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	
	2	3	1	2	2	3	2	5	1	2	3	1	3	1	4	5	1	2	
(3)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ													
	1	2	2	3	3	3													

【解説】

(1)(a)

$a=1$ のとき、直線 ℓ に関して対称である、曲線 C 上の 2 点の座標を

$$(s, s^2-1), (t, t^2-1) \quad (s \neq t)$$

とおく。これら 2 点を結ぶ直線は、直線 ℓ と直交するため、その傾きを考えると、 $s-t \neq 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{(s^2-1)-(t^2-1)}{s-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{s^2-t^2}{s-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow s+t &= 1 \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を得る。また、これら 2 点の midpoint が直線 ℓ 上に存在することから、

$$\begin{aligned} \frac{s+t}{2} + \frac{(s^2-1)+(t^2-1)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2+t^2+s+t-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (s+t)^2+(s+t)-2st-2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

を得る。①、②式より、

$$t^2+1-2st-2=0 \Leftrightarrow st=0$$

となるから、①より、 $s=0$ のとき $t=1$ 、 $t=0$ のとき $s=1$ である。従って、求める 2 点は

$$(1, 0), (0, -1)$$

である。

(b)

まず、曲線 C と直線 ℓ は異なる 2 つの交点をもつから、これらの方程式から x を消去すること

$$-x = ax^2 - 1 \Leftrightarrow ax^2 + x - 1 = 0$$

について、 $a \neq 0$ に注意し、この判別式を D_1 とすると、 a は

$$\begin{aligned} D_1 &> 0 \\ \Leftrightarrow 1^2 + 4a &> 0 \\ \Leftrightarrow a &> -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

を満たす。ここで、直線 ℓ に関して対称である、曲線 C 上の 2 点の座標を

$$(s, as^2-1), (t, at^2-1) \quad (s \neq t)$$

とおく。これら 2 点を結ぶ直線は、直線 ℓ と直交するため、その傾きを考えると、 $s-t \neq 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{(as^2-1)-(at^2-1)}{s-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{a(s^2-t^2)}{s-t} &= 1 \\ \Leftrightarrow s+t &= \frac{1}{a} \quad (\because a \neq 0) \quad \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$

を得る。また、これら 2 点の midpoint が直線 ℓ 上に存在することから、

$$\begin{aligned} \frac{s+t}{2} + \frac{(as^2-1)+(at^2-1)}{2} &= 0 \\ \Leftrightarrow a(s^2+t^2)+s+t-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a(s+t)^2+(s+t)-2ast-2 &= 0 \quad \cdots \textcircled{4} \end{aligned}$$

を得る。よって、③、④式より

$$a\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \frac{1}{a} - 2ast - 2 = 0 \Leftrightarrow st = \frac{1-a}{a^2} \quad \cdots \textcircled{5}$$

となるから、③、⑤より、実数 s, t は X の 2 次方程式

$$X^2 - \frac{1}{a}X + \frac{1-a}{a^2} = 0$$

の 2 解である。曲線 C 上に直線 ℓ に関して対称である異なる 2 点が存在するとき、この 2 次方程式は異なる 2 解をもつから、判別式を D とすると

$$\begin{aligned} D &> 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{a}\right)^2 - 4 \cdot \frac{1-a}{a^2} > 0 \\ \therefore a &> \frac{3}{4} \end{aligned}$$

を得る。これは、 $a > -\frac{1}{4}$ を満たす。

(2)

$$\angle P_0 P_1 B = \theta$$

とおくと、

$$\begin{aligned} \angle P_2 P_1 C &= \theta \\ \angle P_1 P_2 C &= \angle P_3 P_2 D = \frac{\pi}{2} - \theta \\ \angle P_2 P_3 D &= \angle P_4 P_3 A = \theta \end{aligned}$$

が成り立つ。また、

$$AB = DC = \sqrt{(2\sqrt{3})^2 + 2^2} = 4$$

$$BC = DA = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$$

である。従って、 $X = AP_4$ とおくと、

$$\begin{aligned} AP_3 &= \frac{X}{\tan \theta} \\ DP_3 &= AD - AP_3 = 2 - \frac{X}{\tan \theta} \\ DP_2 &= DP_3 \tan \theta = 2 \tan \theta - X \\ CP_2 &= CD - DP_2 = 4 + X - 2 \tan \theta \\ CP_1 &= \frac{CP_2}{\tan \theta} = \frac{4+X}{\tan \theta} - 2 \\ BP_1 &= BC - CP_1 = 4 - \frac{4+X}{\tan \theta} \\ BP_0 &= BP_1 \tan \theta = 4 \tan \theta - 4 - X \end{aligned}$$

と求めることができる。ここで、直線 AB が x 軸正の方向となす角を φ とすると、

$$\tan \varphi = \frac{2}{2\sqrt{3}}$$

$$\therefore \varphi = \frac{\pi}{6}$$

となるので、

$$X = \frac{x_4}{\cos \varphi} = \frac{2x_4}{\sqrt{3}}$$

である。これと点 P_0 が線分 AB の midpoint であることから、

$$\begin{aligned} BP_0 &= 2 \\ \Leftrightarrow 4 \tan \theta - 4 - \frac{2x_4}{\sqrt{3}} &= 2 \\ \Leftrightarrow \tan \theta &= \frac{3}{2} + \frac{x_4}{2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

を得るので、 $\sqrt{3} < x_4 < 2\sqrt{3}$ であるとき、

$$AP_3 = \frac{X}{\tan \theta} = \frac{2x_4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+x_4} = \frac{4}{\frac{3\sqrt{3}}{x_4}+1}$$

$$\therefore 1 < AP_3 < \frac{8}{5}$$

$$DP_2 = 2 \tan \theta - X = \frac{3\sqrt{3}-x_4}{\sqrt{3}}$$

$$\therefore 1 < DP_2 < 2$$

$$CP_1 = \frac{4+X}{\tan \theta} - 2 = \frac{4+\frac{2x_4}{\sqrt{3}}}{\frac{3}{2}+\frac{x_4}{2\sqrt{3}}} - 2 = 2 - \frac{4\sqrt{3}}{3\sqrt{3}+x_4}$$

$$\therefore 1 < CP_1 < \frac{6}{5}$$

となる。従って、

$$x_1 = 2\sqrt{3} - 1 + CP_1 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore 2\sqrt{3} - \frac{1}{2} < x_1 < 2\sqrt{3} - \frac{2}{5}$$

$$x_2 = -1 + DP_2 \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \frac{1}{2}\sqrt{3} - 1 < x_2 < \sqrt{3} - 1$$

$$x_3 = -AP_3 \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore -\frac{4}{5} < x_3 < -\frac{1}{2}$$

であることがわかる。

(3)

実数条件より

$$\begin{aligned} 3-x^2+2x &> 0 \quad \text{かつ} \quad x-a > 0 \\ \Leftrightarrow -(x-3)(x+1) &> 0 \quad \text{かつ} \quad x-a > 0 \\ \Leftrightarrow -1 < x < 3 \quad \text{かつ} \quad x &> a \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成り立つ。このとき、与えられた方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\log(3-x^2+2x)}{\log(x-a)} &= 2 \\ \Leftrightarrow \log(3-x^2+2x) &= \log(x-a)^2 \\ \Leftrightarrow 3-x^2+2x &= (x-a)^2 \\ \Leftrightarrow 2x^2-2(a+1)x+a^2-3 &= 0 \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と変形できる。よって、与えられた方程式が実数解をもつのは、方程式②が①を満たす実数解をもち、かつ $\log(x-a) \neq 0$ を満たすときである。ここで

$$\begin{aligned} \log(x-a) &\neq 0 \\ \Leftrightarrow x-a &\neq 1 \\ \Leftrightarrow x &\neq a+1 \end{aligned}$$

であり、②が仮に $x=a+1$ を解に持つとすると

$$\begin{aligned} 2(a+1)^2-2(a+1)^2+a^2-3 &= 0 \\ \therefore a &= \pm\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。よって $a \neq \pm\sqrt{3}$ である。ここで、 x の関数 $f(x)$ を、

$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2-2(a+1)x+a^2-3 \\ &= 2\left(x-\frac{a+1}{2}\right)^2 + \frac{a^2-2a-7}{2} \end{aligned}$$

とおくと、曲線 $y=f(x)$ は軸 $x=\frac{a+1}{2}$ 、頂点 $\left(\frac{a+1}{2}, \frac{a^2-2a-7}{2}\right)$ の下に凸な放物線となる。

$f(x)=0$ が実数解を持つとき、放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を考えると

$$\begin{aligned} \frac{a^2-2a-7}{2} &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} &\leq a \leq 1+2\sqrt{2} \end{aligned}$$

が成り立つ。これより、放物線 $y=f(x)$ の軸 $x=\frac{a+1}{2}$ について、

$$\begin{aligned} 1-2\sqrt{2} &\leq a \leq 1+2\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow -1 < 1-\sqrt{2} &\leq \frac{a+1}{2} \leq 1+\sqrt{2} < 3 \end{aligned}$$

が成り立つ。従って、軸 $x=\frac{a+1}{2}$ は $-1 < x < 3$ を満たす。また、

$$f(-1) = a^2+2a+1 = (a+1)^2 \geq 0$$

$$f(3) = a^2-6a+9 = (a-3)^2 \geq 0$$

より、放物線 $y=f(x)$ は以下の図のようになっている。

以下、軸 $x=\frac{a+1}{2}$ と $x=a$ との大小関係により場合分けを行い、 $f(x)=0$ の解を考える。

[1] $a < \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a < 1$ のとき

このとき、上の図より、 $f(x)=0$ は $-1 < x < 3$ 、 $a < x$ を満たす解をもつから、与えられた方程式は実数解をもつ。

[2] $a > \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a > 1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(a) &< 0 \\ \Leftrightarrow 2a^2-2(a+1)a+a^2-3 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a-3)(a+1) &< 0 \\ \Leftrightarrow 1 < a < \sqrt{3}, \sqrt{3} < a < 3 \quad (\because a > 1, a \neq \sqrt{3}) \end{aligned}$$

であるから、 $1 < a < \sqrt{3}$ 、 $\sqrt{3} < a < 3$ のとき、与えられた方程式は実数解をもつ。

[3] $a = \frac{a+1}{2} \Leftrightarrow a = 1$ のとき

このとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2x^2-4x-2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{2} \end{aligned}$$

となるから、 $f(x)=0$ は $-1 < x < 3$ 、 $a < x$ を満たす解をもつ、従って、与えられた方程式は実数解をもつ。

以上[1],[2],[3]より、実数 a のとり得る値の範囲は、

$$1-2\sqrt{2} \leq a < \sqrt{3}, \sqrt{3} < a < 3$$

となる。

(1)

求める極限值は

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-3} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^x \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^{\frac{x-3}{6} \cdot \frac{6x}{x-3}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{6}{x-3} \right)^{\frac{x-3}{6}} \right\}^{\frac{6}{1-\frac{3}{x}}} \\
 &= e^6
 \end{aligned}$$

となる。

(答) e^6

(2)(a)

$$\begin{aligned}
 \overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\
 &= (2, 3, -1) - (1, 2, 0) \\
 &= (1, 1, -1)
 \end{aligned}$$

である。点Qは直線 ℓ 上の点であり、 ℓ の方向ベクトルは $\overline{AB}$ であるから、 $\overline{OQ}$ は実数 s を用いて

$$\begin{aligned}
 \overline{OQ} &= \overline{OA} + s\overline{AB} \\
 &= (1, 2, 0) + s(1, 1, -1) \\
 &= (s+1, s+2, -s)
 \end{aligned}$$

と表すことができる。したがって、

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ} &= \overline{OQ} - \overline{OP} \\
 &= (s+1, s+2, -s) - (t, -t, 3t) \\
 &= (s-t+1, s+t+2, -s-3t)
 \end{aligned}$$

である。ここで、直線 ℓ と線分PQが直交することから、

$$\begin{aligned}
 \overline{PQ} \cdot \overline{AB} &= 0 \\
 \Leftrightarrow (s-t+1, s+t+2, -s-3t) \cdot (1, 1, -1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 3s+3t+3 &= 0 \\
 \therefore s &= -t-1
 \end{aligned}$$

となる。したがって、

$$\overline{OQ} = (-t, -t+1, t+1)$$

より、点Qの座標を t を用いて表すと $(-t, -t+1, t+1)$ となる。

(答) $Q(-t, -t+1, t+1)$

(b)

(a)の結果より、

$$\overline{PQ} = (-2t, 1, -2t+1)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 |\overline{PQ}|^2 &= (-2t)^2 + 1 + (-2t+1)^2 \\
 &= 8t^2 - 4t + 2 \\
 &= 8\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $|\overline{PQ}|^2$ は $t = \frac{1}{4}$ で最小値 $\frac{3}{2}$ をとる。 $|\overline{PQ}| > 0$ であるから、 $|\overline{PQ}|$ も $|\overline{PQ}|^2$ と同

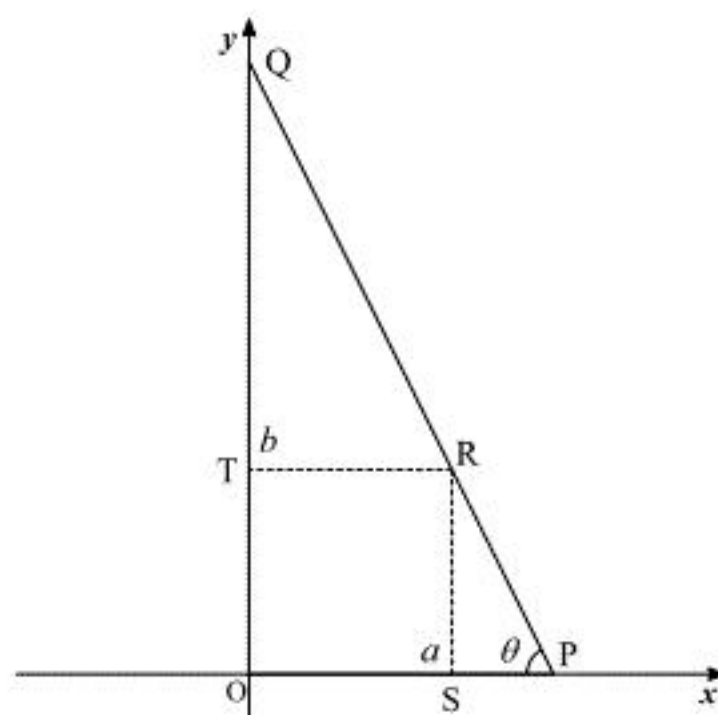
様に $t = \frac{1}{4}$ で最小となる。

(答) $t = \frac{1}{4}$

3

(1)

点 R から x 軸, y 軸に下ろした垂線の足をそれぞれ S, T として, 図を描くと下のようになる。



これより

$$\begin{aligned} PQ &= PR + QR \\ &= \frac{SR}{\sin \theta} + \frac{TR}{\cos \theta} \\ &= \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta} \left(\because 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad PQ = \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta}$$

(2)

(1)より

$$f(\theta) = \frac{b}{\sin \theta} + \frac{a}{\cos \theta}$$

とにおいて θ で微分すると

$$\begin{aligned} f'(\theta) &= -\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} b + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} a \\ &= \frac{a \cos \theta}{\sin^2 \theta} \left(\tan^3 \theta - \frac{b}{a} \right) \end{aligned}$$

となる。ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $0 < \cos \theta < 1$, $0 < \sin \theta < 1$, $\tan \theta > 0$ であり, $\tan \theta$ は θ について

単調増加であるから,

$$\tan^3 \theta - \frac{b}{a} = 0 \Leftrightarrow \tan \theta = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{3}}$$

を満たす θ がただ1つ存在する。このときの θ を α とおくと, $f(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	(0)	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		-	0	+	
$f(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

また, $\theta = \alpha$ のとき

$$\tan \alpha = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{3}}, \cos \alpha = \frac{a^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}, \sin \alpha = \frac{b^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}}}$$

であり, このときの線分 PQ の長さは

$$PQ = b^{\frac{2}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} + a^{\frac{2}{3}} \sqrt{a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}} = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \left(\frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{3}}, PQ = \left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}} \right)^{\frac{3}{2}}$$

(3)

$a=1, b=8$ のとき, 三角形 OPQ の3辺の長さの和を $g(\theta)$ とすると

$$\begin{aligned} g(\theta) &= PR + RQ + QT + TO + OS + SP \\ &= \frac{8}{\sin \theta} + \frac{1}{\cos \theta} + \tan \theta + 8 + 1 + \frac{8}{\tan \theta} \end{aligned}$$

と表される。これを θ で微分すると

$$\begin{aligned} g'(\theta) &= -\frac{8 \cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\sin \theta}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\cos^2 \theta} - \frac{8}{\sin^2 \theta} \\ &= \frac{\sin^3 \theta + \sin^2 \theta - 8 \cos^3 \theta - 8 \cos^2 \theta}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta} \end{aligned}$$

となる。ここでこの式の分子を整理すると

$$\begin{aligned} &\sin^3 \theta + \sin^2 \theta - 8 \cos^3 \theta - 8 \cos^2 \theta \\ &= \sin^2 \theta (1 + \sin \theta) - 8 \cos^2 \theta (1 + \cos \theta) \\ &= (1 - \cos^2 \theta) (1 + \sin \theta) - 8 (1 - \sin^2 \theta) (1 + \cos \theta) \\ &= 8 (1 + \cos \theta) \sin^2 \theta + (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta - (\cos^2 \theta + 8 \cos \theta + 7) \\ &= 8 (1 + \cos \theta) \sin^2 \theta + (1 - \cos \theta) (1 + \cos \theta) \sin \theta - (\cos \theta + 1) (\cos \theta + 7) \\ &= (1 + \cos \theta) \{ 8 \sin^2 \theta - (\cos \theta - 1) \sin \theta - (\cos \theta + 7) \} \\ &= (1 + \cos \theta) (\sin \theta + 1) (8 \sin \theta - \cos \theta - 7) \end{aligned}$$

となるから,

$$g'(\theta) = \frac{(1 + \cos \theta) (\sin \theta + 1) (8 \sin \theta - \cos \theta - 7)}{\cos^2 \theta \sin^2 \theta}$$

と表される。ここで, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ では $0 < \cos \theta < 1$, $0 < \sin \theta < 1$ であり, 実数 $\beta \left(0 < \beta < \frac{\pi}{2} \right)$ を

$$\cos \beta = \frac{8}{\sqrt{65}} \quad \text{かつ} \quad \sin \beta = \frac{1}{\sqrt{65}}$$

を満たすものとして定めると, $-\beta < \theta - \beta < \frac{\pi}{2} - \beta$ の範囲で $\sin(\theta - \beta)$ は θ について単調増加

であり, $\sin(-\beta) = -\frac{1}{\sqrt{65}}, \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \frac{8}{\sqrt{65}}$ であることから

$$\begin{aligned} 8 \sin \theta - \cos \theta - 7 &= 0 \\ \Leftrightarrow \sqrt{65} \sin(\theta - \beta) &= 7 \\ \Leftrightarrow \sin(\theta - \beta) &= \frac{7}{\sqrt{65}} \end{aligned}$$

を満たす θ がただ1つ存在する。このときの θ を γ とおくと, $g(\theta)$ の増減表は以下のようになる。

θ	(0)	...	γ	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$
$g'(\theta)$		-	0	+	
$g(\theta)$		$\searrow$	最小	$\nearrow$	

また, $\theta = \gamma$ のとき

$$\begin{aligned} \cos \gamma &= \cos \beta \cos(\gamma - \beta) - \sin \beta \sin(\gamma - \beta) = \frac{8}{\sqrt{65}} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} - \frac{1}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{5}{13} \\ \sin \gamma &= \sin \beta \cos(\gamma - \beta) + \cos \beta \sin(\gamma - \beta) = \frac{1}{\sqrt{65}} \cdot \frac{4}{\sqrt{65}} + \frac{8}{\sqrt{65}} \cdot \frac{7}{\sqrt{65}} = \frac{12}{13} \\ \tan \gamma &= \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma} = \frac{12}{5} \end{aligned}$$

であり, このときの線分 PQ の長さは

$$PQ = \frac{1}{\frac{5}{13}} + \frac{8}{\frac{12}{13}} = \frac{13}{5} + \frac{26}{3} = \frac{169}{15}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \tan \theta = \frac{12}{5}, PQ = \frac{169}{15}$$