

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	
	3	2	3	2	1	
(2)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	2	7	3	2	1	2

【解説】

(1)

仮定より

$$f'(x) = 3x^2 - 2ax + 3b$$

となる。 $f(x)$ は $x=1$ で極値をとるため

$$f'(1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3 - 2a + 3b = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}$$

となる。またこのとき

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 2\left(\frac{3}{2}b + \frac{3}{2}\right)x + 3b \\ &= 3x^2 - 3(b+1)x + 3b \\ &= 3(x-1)(x-b) \end{aligned}$$

となるから、 $f'(x)$ は $x=1, b$ で0となる。よって $f(x)$ は $b \neq 1$ かつ $a = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}$ のときに限り

 $x=1$ で極値を持つ。

(2)

(1)の結果より、 $b \neq 1$ のとき3次関数 $y=f(x)$ は $x=1, b$ で極値をとる。ここで、3次方程式 $f(x)=0$ が異なる3つの実数解をもつのは、極値 $f(1), f(b)$ の符号が反対になる場合である。よって、求める条件は

$$f(1)f(b) < 0$$

$$\Leftrightarrow (-a + 3b - 9)(b^3 - ab^2 + 3b^2 - 10) < 0$$

であるが、(1)の結果より $a = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}$ を代入して整理すると

$$\begin{aligned} &\left\{-\left(\frac{3}{2}b + \frac{3}{2}\right) + 3b - 9\right\} \left\{b^3 - \left(\frac{3}{2}b + \frac{3}{2}\right)b^2 + 3b^2 - 10\right\} < 0 \\ &\Leftrightarrow (b-7)(b^3 - 3b^2 + 20) > 0 \\ &\Leftrightarrow (b-7)(b+2)(b^2 - 5b + 10) > 0 \\ &\Leftrightarrow (b-7)(b+2) \left\{\left(b - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right\} > 0 \\ &\Leftrightarrow b < -2, 7 < b \end{aligned}$$

となる。 $a = \frac{3}{2}b + \frac{3}{2}$ より $b = \frac{2}{3}a - 1$ であるから、

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3}a - 1 < -2, 7 < \frac{2}{3}a - 1 \\ &\Leftrightarrow a < -\frac{3}{2}, 12 < a \end{aligned}$$

となる。

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ		
	2	3	2	1		
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ
	3	1	0	1	0	5
(3)	サ	シ				
	6	5				
(4)	ス	セ	ソ			
	3	4	5			

【解説】

(1)

四角形 ABCD は円に内接するから

$$\begin{aligned}\cos \angle D &= \cos (\pi - \angle B) \\ &= -\cos \angle B\end{aligned}$$

となるので、余弦定理より

$$\begin{aligned}&\begin{cases} AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \angle B \\ AC^2 = CD^2 + DA^2 - 2CD \cdot DA \cos \angle D \end{cases} \\ &\Leftrightarrow AC^2 = \begin{cases} 13 - 12 \cos \angle B \\ 61 + 60 \cos \angle B \end{cases} \\ &\Rightarrow 13 - 12 \cos \angle B = 61 + 60 \cos \angle B \\ &\Leftrightarrow \cos \angle B = -\frac{2}{3} \\ &\therefore AC = \sqrt{21}, \cos \angle B = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$0 < \angle B < \pi$ より、(1)の結果を利用すると、

$$\begin{aligned}\sin \angle B &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle B} \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

となる。よって、円 O の半径を R とおくと、 $\triangle ABC$ に正弦定理を適用して、

$$\begin{aligned}2R &= \frac{AC}{\sin \angle B} \\ \therefore R &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{21}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} = \frac{3}{10} \sqrt{105}\end{aligned}$$

となる。

(3)

$\angle D = \pi - \angle B$ より

$$\begin{aligned}\sin \angle B &= \sin \angle D \\ &= \frac{\sqrt{5}}{3}\end{aligned}$$

となる。求める面積は $\triangle ABC$ と $\triangle ACD$ の面積を足したものであるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \angle B + \frac{1}{2} CD \cdot DA \cdot \sin \angle D &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} (2 \cdot 3 + 6 \cdot 5) \\ &= 6\sqrt{5}\end{aligned}$$

となる。

(4)

四角形 ABCD が外接する円を O' とし、中心を I とおく。円 O' は四角形 ABCD の各辺と接するので、 $\triangle AIB$ 、 $\triangle BIC$ 、 $\triangle CID$ 、 $\triangle DIA$ の面積は、円 O' の半径を r とするとそれぞれ

$$\frac{1}{2} r \cdot AB, \frac{1}{2} r \cdot BC, \frac{1}{2} r \cdot CD, \frac{1}{2} r \cdot DA$$

となる。四角形 ABCD の面積はこれらの和であるから、(3)の結果を用いて

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} r (AB + BC + CD + DA) &= 6\sqrt{5} \\ \Leftrightarrow r &= \frac{3\sqrt{5}}{4}\end{aligned}$$

となる。

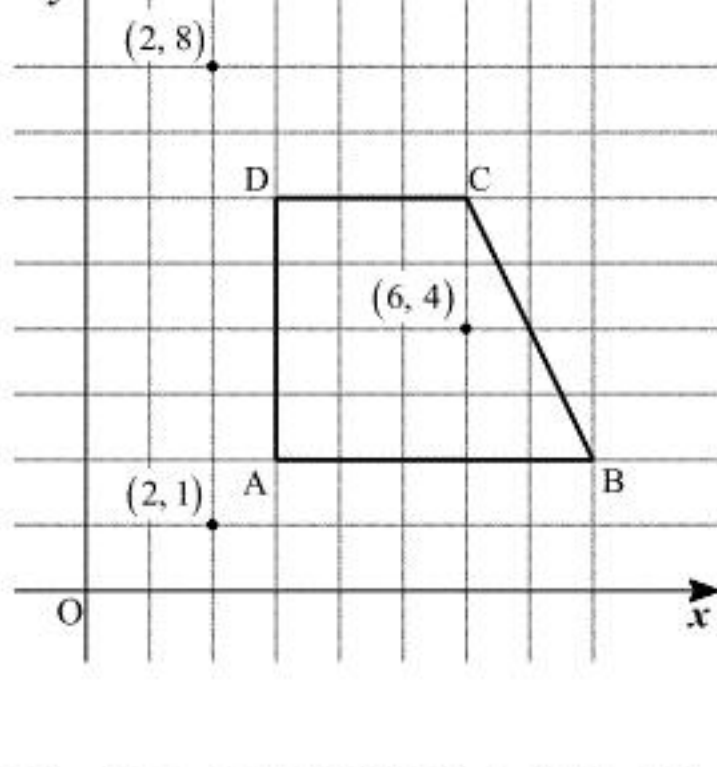
3

【解答】

(1)		ア	イ	ウ	エ	オ								
		2	5	2	5	5								
(2)	(a)	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
	(b)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
		9	1	4	1	1	4	2	4	1	2	8	0	5

【解説】

(1)



四角形 $ABCD$ 上の点 X を、点 P からの距離が最小となる点とする。図より、点 P の座標が $(2, 1)$ のとき、 $X = A$ であるから、

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (2-1)^2}$$

$$= \sqrt{2}$$

となる。点 P の座標が $(2, 8)$ のとき、 $X = D$ であるから、

$$d = \sqrt{(3-2)^2 + (6-8)^2}$$

$$= \sqrt{5}$$

となる。点 P の座標が $(6, 4)$ のとき、直線 AB , CD , DA との距離はそれぞれ $3, 2, 2$ である。ここで、直線 BC の方程式は

$$y = \frac{2-6}{8-6}(x-8)+2$$

$$= -2x+18$$

であるから、直線 BC と点 $P(6, 4)$ の距離は

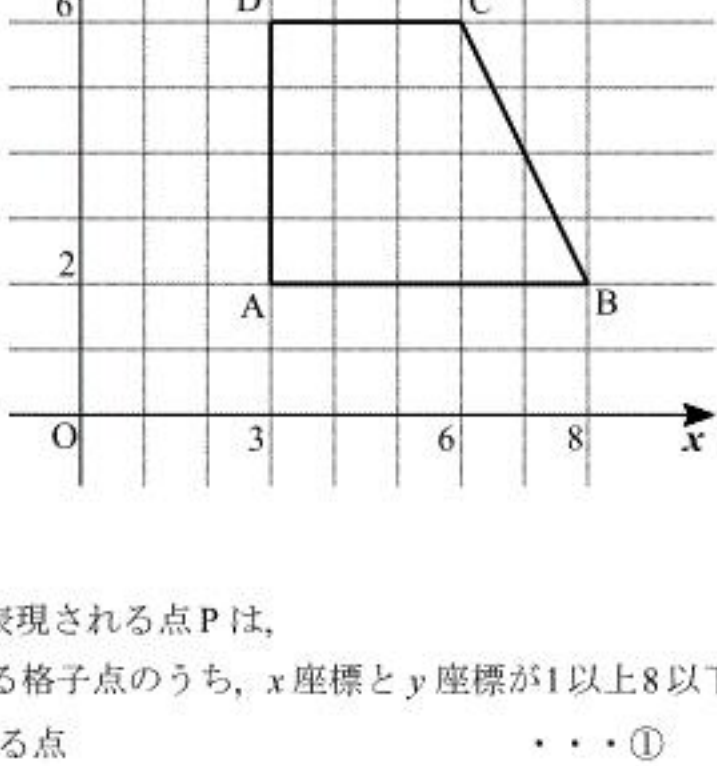
$$\frac{|6 \cdot 2 + 4 - 18|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt{5}$$

$$< 2$$

となる。したがって、点 X は辺 BC 上に存在し、 $d = \frac{2}{5}\sqrt{5}$ となる。

(2)



題意の試行によって表現される点 P は、

第1象限にある格子点のうち、 x 座標と y 座標が1以上8以下であり、かつ x 座標と y 座標が異なる点

・・・①

である。このような点 P は

$$8 \cdot 7 = 56 \text{ 通り}$$

存在し、これらは全て等しい確率で現れる。

(a)

$d = 0$ となるのは点 P が四角形 $ABCD$ 上にあるときであり、これを満たす格子点は

辺 AB 上に6個

辺 BC 上に3個

辺 CD 上に4個

辺 AD 上に5個

存在するので、重複して数えている4点を除くと、全部で14個である。ただし、これらのうち $(3, 3)$, $(6, 6)$ の2点は条件①を満たさない。よって、 $d = 0$ となる確率は

$$\frac{12}{8 \cdot 7} = \frac{3}{14}$$

である。次に、 $d = 1$ となる確率について考える。四角形 $ABCD$ 上の点から距離が1であるような点の集合は下図の太線ようになる。



直線 BC に平行で距離が1である直線の方程式は

$$y = -2x+18 \pm \sqrt{5}$$

であるから、この直線上に格子点は存在しない。よって、 $d = 1$ となるような格子点の個数は上図より22個である。このうち、 $(2, 2)$, $(4, 4)$, $(5, 5)$, $(9, 2)$ の4つの点は条件①を満たさないから、 $d = 1$ となる確率は

$$\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

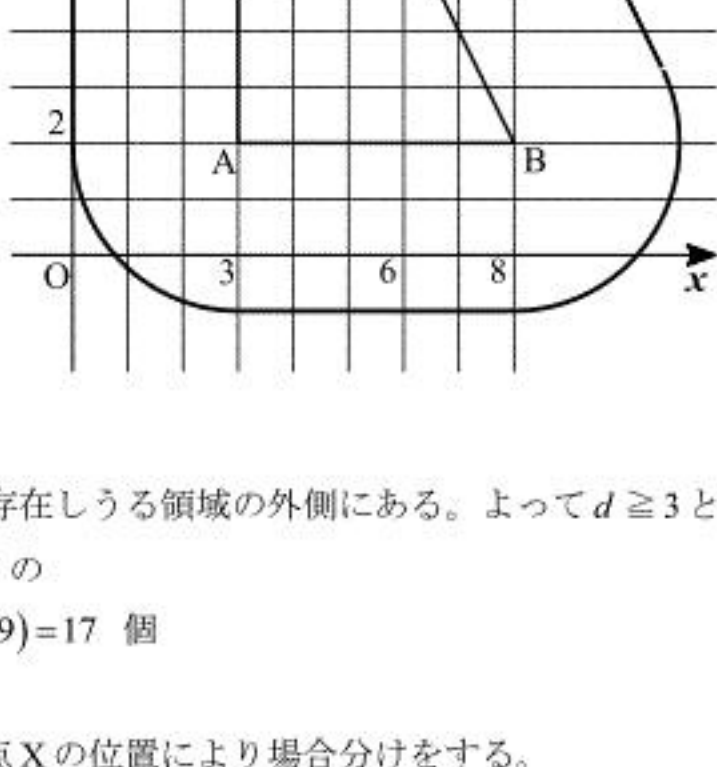
となる。次に、 $d = 2$ となる確率について考える。四角形 $ABCD$ 上の点から距離が2であるような点の集合は下図の太線ようになる。



$d = 1$ のときと同様に考えて、太線上にある格子点のうち条件①を満たすものの数は9個であるから、 $d = 2$ となる確率は

$$\frac{9}{56}$$

である。次に $d \geq 3$ となる確率について考える。四角形 $ABCD$ 上の点から距離が3であるような点の集合は下図の太線ようになる。



上図の太線は点 P が存在しうる領域の外側にある。よって $d \geq 3$ となる確率は0であることがわかる。また、残りの

$$56 - (12 + 18 + 9) = 17 \text{ 個}$$

の格子点について、点 X の位置により場合分けをする。

[1] 点 X が点 $ABCD$ のいずれかに一致するとき

このような点 P は7個あり、

点 P の座標が $(2, 1)$, $(2, 7)$ のとき $d = \sqrt{2}$

点 P の座標が $(1, 7)$, $(2, 8)$, $(7, 8)$, $(8, 7)$ のとき $d = \sqrt{5}$

点 P の座標が $(1, 8)$ のとき $d = 2\sqrt{2}$

となる。

[2] 点 X が辺 BC 上(ただし、両端の点 B , C を含まない)にあるとき

直線 BC の方程式は $y = -2x+18$ と表されるので、

点 P の座標が $(6, 5)$, $(7, 3)$, $(7, 5)$, $(8, 3)$ のとき $d = \frac{\sqrt{5}}{5}$

点 P の座標が $(6, 4)$, $(7, 6)$, $(8, 4)$ のとき $d = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

点 P の座標が $(8, 5)$ のとき $d = \frac{3\sqrt{5}}{5}$

点 P の座標が $(5, 4)$, $(8, 6)$ のとき $d = \frac{4}{5}\sqrt{5}$

となる。

以上[1][2]より、点 P がこれら17個の格子点となると、 d は無理数となることが分かる。したがって、この場合の確率は、

$$\frac{17}{56}$$

である。

(b)

(a)の結果より、 d の期待値は

$$\frac{3}{14} \cdot 0 + \frac{9}{28} \cdot 1 + \frac{9}{56} \cdot 2$$

$$+ \frac{1}{56} \left(2 \cdot \sqrt{2} + 4 \cdot \sqrt{5} + 2\sqrt{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} + 3 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{3\sqrt{5}}{5} + 2 \cdot \frac{4\sqrt{5}}{5} \right)$$

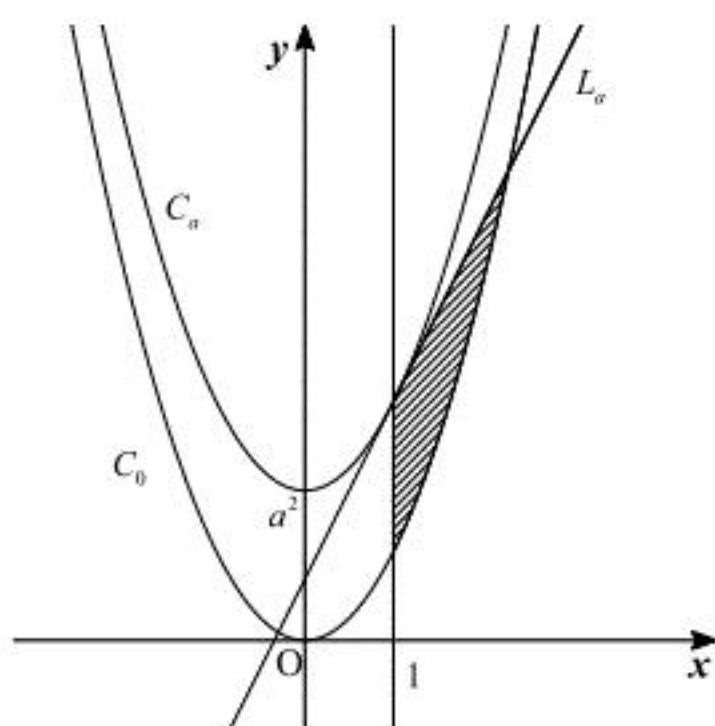
$$= \frac{9}{14} + \frac{1}{14}\sqrt{2} + \frac{41}{280}\sqrt{5}$$

となる。

【解答】

(1)	(a)	ア	イ	ウ
		2	3	3
	(b)	エ	オ	
		5	4	
(2)		カ	キ	ク
		6	8	3

【解説】



$C_a: y = x^2 + a^2$ より $y' = 2x$ であるから、 L_a の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2(x-1) + 1 + a^2 \\ &= 2x - 1 + a^2 \end{aligned}$$

となる。よって C_0 と L_a の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 2x - 1 + a^2 &= x^2 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - a^2 + 1 &= 0 \\ \therefore x &= 1 \pm a \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$ より、 M の右側にある交点の x 座標は $x = 1 + a$ である。したがって、 S_a は上図斜線部の領域の面積であるから

$$\begin{aligned} \int_1^{1+a} \{(2x-1+a^2) - x^2\} dx &= -\int_1^{1+a} (x-1+a)(x-1-a) dx \\ &= -\int_1^{1+a} \{(x-1-a)^2 + 2a(x-1-a)\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}(x-1-a)^3 + a(x-1-a)^2 \right]_1^{1+a} \\ &= \frac{2}{3}a^3 \end{aligned}$$

となる。

(b)

(a)より $L_3: y = 2x + 8$, $S_3 = 18$ となる。ここで、 $L: y = 2x + b$ とおくと、 C_0 と L が異なる2点で交わるためには、2次方程式

$$x^2 = 2x + b$$

が異なる2つの実数解をもつ必要がある。したがって、判別式を D とすると、 $D > 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &> 0 \\ \Leftrightarrow 1^2 + b &> 0 \\ \therefore b &> -1 \end{aligned}$$

となる。この条件のもとで、 C_0 と L の交点の x 座標を求めると、

$$\begin{aligned} x^2 &= 2x + b \\ \Leftrightarrow x - 2x - b &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 1 \pm \sqrt{1+b} \end{aligned}$$

となる。このとき、 M の右側にある交点の x 座標は $x = 1 + \sqrt{1+b}$ であるから、

$$\begin{aligned} S &= \int_1^{1+\sqrt{1+b}} \{(2x+b) - x^2\} dx \\ &= -\int_1^{1+\sqrt{1+b}} (x-1-\sqrt{1+b})(x-1+\sqrt{1+b}) dx \\ &= -\int_1^{1+\sqrt{1+b}} \{(x-1-\sqrt{1+b})^2 + 2\sqrt{1+b}(x-1-\sqrt{1+b})\} dx \\ &= -\left[\frac{1}{3}(x-1-\sqrt{1+b})^3 + \sqrt{1+b}(x-1-\sqrt{1+b})^2 \right]_1^{1+\sqrt{1+b}} \\ &= \frac{2}{3}(1+b)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

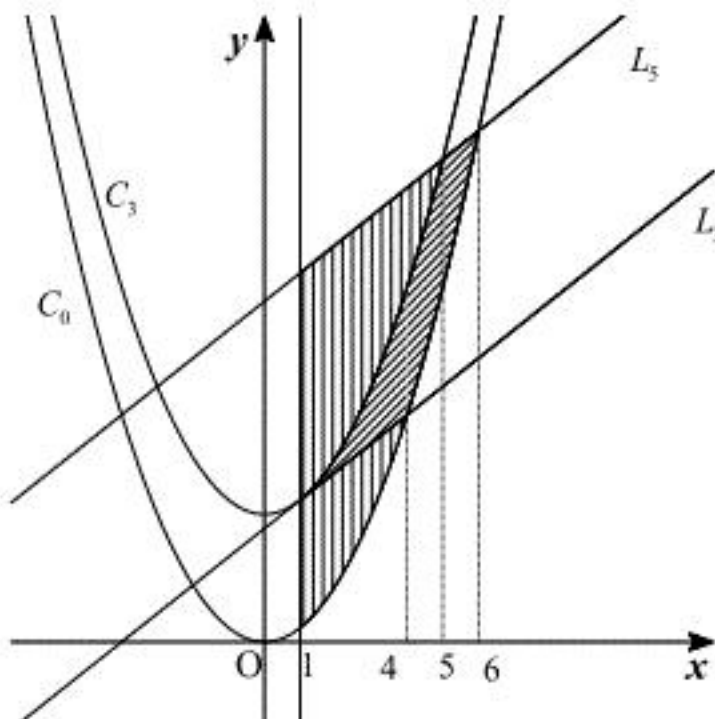
となる。よって、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{8}S_3 \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3}(1+b)^{\frac{3}{2}} &= \frac{9}{4} \\ \Leftrightarrow b &= \frac{5}{4} \end{aligned}$$

となるから、 L の y 切片は $\frac{5}{4}$ である。

(2)

求める面積は下図斜線部の領域の面積である。



斜線部の領域の面積は、縦線部と斜線部を合わせた領域の面積から、縦線部の領域の面積を引くことにより求められる。ここで、 L_5 と C_3 の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} x^2 + 9 &= 2x + 24 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-5)(x+3) &= 0 \\ \therefore x &= -3, 5 \end{aligned}$$

である。よって、求める面積は

$$\begin{aligned} S_5 - S_3 - \int_1^5 \{(2x+24) - (x^2+9)\} dx &= S_5 - S_3 + \int_1^5 (x+3)(x-5) dx \\ &= \frac{2}{3}(5^3 - 3^3) + \int_1^5 \{(x-5)^2 + 8(x-5)\} dx \\ &= \frac{196}{3} + \left[\frac{1}{3}(x-5)^3 + 4(x-5)^2 \right]_1^5 \\ &= \frac{196}{3} - \frac{128}{3} \\ &= \frac{68}{3} \end{aligned}$$

となる。

(1)	ア	イ	ウ		
	4	1	6		
(2)	エ	オ	カ	キ	ク
	1	6	5	1	3
(3)	ケ	コ	サ		
	1	5	4		

(1)

まず，以下の命題 A

A: すべての自然数 l について， k を $1 \leq k \leq 2^l - 1$ を満たす自然数とすると， ${}_2C_k$ は偶数となる

を数学的帰納法を用いて示す。

[1] $l=1$ のとき

$1 \leq k \leq 2^1 - 1$ を満たす自然数 k は 1 のみである。このとき，

$${}_2C_1 = 2$$

であるから， $l=1$ のとき命題 A は成り立つ。

[2] $l=m$ で命題 A が成り立つとき

このとき， $1 \leq k \leq 2^m - 1$ を満たす k について ${}_mC_k$ はすべて偶数となる。一方，2 項定理

より， ${}_nC_k$ は $(a+b)^n$ を展開したときの $a^k b^{n-k}$ の項の係数である。したがって，

$$(a+b)^{2^m} = a^{2^m} + \sum_{k=1}^{2^m-1} {}_mC_k \cdot a^k b^{2^m-k} + b^{2^m}$$

が成り立つ。この式の左辺の 2 乗は， i を $1 \leq i \leq 2^{m+1} - 1$ を満たす整数とすると，

$$\left\{ (a+b)^{2^m} \right\}^2 = (a+b)^{2^{m+1}} = a^{2^{m+1}} + \sum_{i=1}^{2^{m+1}-1} {}_{2^m}C_i \cdot a^i b^{2^{m+1}-i} + b^{2^{m+1}}$$

であるから， $a^i b^{2^{m+1}-i}$ の係数は ${}_{2^m}C_i$ となる。一方，右辺の 2 乗を考えると， $a^i b^{2^{m+1}-i}$ の係数

は ${}_mC_k$ の積と和で表現されることが分かる。よって， ${}_{2^m}C_i$ は偶数となるので， $l=m$ で命題 A が成り立つとき， $l=m+1$ でも命題 A は成り立つ。

以上[1][2]より，命題 A が示された。続けて，以下の命題 B

B: 自然数 n, l が $2^l \leq n < 2^{l+1} - 1$ を満たすとき， $m = n - 2^l$ ($0 \leq m < 2^l - 1$) とおくと， $m+1 \leq k \leq 2^l - 1$ を満たす自然数 k について ${}_{2^l+m}C_k$ は偶数となり， ${}_{2^l+m}C_m$ は奇数となる

を示す。

[1] $m=0$ のとき，

命題 A より， $1 \leq k \leq 2^l - 1$ を満たす自然数 k について， ${}_2C_k$ は偶数となる。また， ${}_2C_0 = 1$ は奇数である。以上より， $m=0$ のときに命題 B は成り立つ。

[2] $m=p$ ($0 \leq p < 2^l - 2$) で命題 B が成り立つとき

このとき， $p+1 \leq k \leq 2^l - 1$ を満たす自然数 k について ${}_{2^l+p}C_k$ は偶数となり， ${}_{2^l+p}C_p$ は奇

数となる。ここで 2 項係数の性質より， $p+2 \leq k \leq 2^l - 1$ について

$${}_{2^l+p+1}C_k = {}_{2^l+p}C_{k-1} + {}_{2^l+p}C_k$$

が成り立つが， ${}_{2^l+p}C_{k-1}$ 及び ${}_{2^l+p}C_k$ はともに偶数なので，これは偶数である。一方，

$${}_{2^l+p+1}C_{p+1} = {}_{2^l+p}C_p + {}_{2^l+p}C_{p+1}$$

が成り立つが， ${}_{2^l+p}C_p$ は奇数， ${}_{2^l+p}C_{p+1}$ は偶数であるから，これは奇数である。したがっ

て， $m=p$ ($0 \leq p < 2^l - 2$) で命題 B が成立すれば， $m=p+1$ でも命題 B が成り立つ。

以上[1][2]より，命題 B が示された。ここで，条件 P_l が成り立つためには，命題 B において

$m=0$ となること，すなわち自然数 n が自然数 l を用いて $n=2^l$ と表されることが必要十分であると分かる。よって， P_l を満たす n は $n=2, 4, 8, 16$ の 4 個であり，このうち最大のものは 16 である。

(2)

命題 B より(1)と同様に考えると，条件 P_2 が成り立つためには，命題 B において $m=0, 1$ となること，すなわち自然数 n が自然数 l を用いて $n=2^l, 2^l+1$ と表されることが必要十分であると分かる。

$2^9 = 512, 2^{10} = 1024$ であるから， P_2 を満たす n は $4, 5, 8, 9, \dots, 512, 513$ の 16 個であり，このうち最大のものは 513 である。

(3)

命題 B より(1)と同様に考えると，条件 P_3 が成り立つためには，命題 B において $m=0, 1, 2$ となること，すなわち自然数 n が自然数 l を用いて $n=2^l, 2^l+1, 2^l+2$ と表されることが必要十分であると分かる。

ここで，与えられた条件 $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ を利用すると，

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{53} &= 53 \log_{10} 2 \\ &< 53 \cdot 0.3011 \\ &= 15.9583 \\ &< 16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log_{10} 2^{54} &= 54 \log_{10} 2 \\ &> 54 \cdot 0.3010 \\ &= 16.254 \\ &> 16 \end{aligned}$$

$$\therefore 2^{53} < 10^{16} < 2^{54}$$

である。よって， P_3 を満たす n は $6, 8, 9, 10, \dots, 2^{53}, 2^{53}+1, 2^{53}+2$ の 154 個である。