

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ			
	5	7	7	5			
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	2	6	0	3	1	5
(3)	シ	ス	セ	ソ			
	1	6	8	0			
(4)	タ	チ	ツ	テ			
	1	0	2	3			

【解説】

(1)

部屋に区別が無いことに注意して11人を4人、4人、3人に分けて

$$\frac{{}_{11}C_4 \cdot {}_7C_4 \cdot {}_3C_3}{2!} = \frac{330 \cdot 35}{2} \cdot 1$$

$$= 5775 \text{ [通り]}$$

と求まる。

(2)

生徒Aと生徒Bが同じ4人の組に入るような分け方は、生徒Aと生徒Bを除く残りの9人を2人、4人、3人に分けて

$${}_9C_2 \cdot {}_7C_4 \cdot {}_3C_3 = 36 \cdot 35 \cdot 1$$

$$= 1260 \text{ [通り]}$$

と求まる。また、生徒Aと生徒Bが同じ3人の組に入るような分け方は、生徒A、生徒Bを除く残りの9人を部屋に区別が無いことに注意して4人、4人、1人に分けて

$$\frac{{}_9C_4 \cdot {}_5C_4 \cdot {}_1C_1}{2!} = \frac{126 \cdot 5}{2} \cdot 1$$

$$= 315 \text{ [通り]}$$

と求まる。

(3)

生徒A、生徒Bが4人の組に分けられ、生徒Cが3人の組に分けられる場合の数は、残りの8人のうちAの部屋に3人、Bの部屋に3人、Cの部屋に2人が入るので

$${}_8C_3 \cdot {}_5C_3 \cdot {}_2C_2 = 56 \cdot 10 \cdot 1$$

$$= 560 \text{ [通り]}$$

と求まる。生徒A、生徒Bが3人の組に分けられる場合も同様にそれぞれ560通りであるから、生徒A、生徒B、生徒Cが異なる組に入るような場合の数は

$$560 \cdot 3 = 1680 \text{ [通り]}$$

と求まる。

(4)

11人を2組に分ける方法は、生徒Bから生徒Kまでの各生徒を生徒Aと同じ組または異なる組に分ける場合の数から、生徒全員が同じ組に入る場合の数を除いたものに等しい。したがって、求める場合の数は

$$2^{10} - 1 = 1024 - 1$$

$$= 1023 \text{ [通り]}$$

である。

〔解答〕

ア	イ	ウ	エ	オ	
7	7	2	5	4	
カ	キ	ク	ケ		
7	2	5	4		
コ	サ	シ	ス	セ	ソ
1	2	5	4	2	7

〔解説〕

$$f(x)=ax^2-bx-c\;(a\neq 0)$$

とおくと、放物線 $C:y=f(x)$ は点 $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ を通るので

$$\begin{aligned} -1&=f\left(-\frac{1}{2}\right) \\ \Leftrightarrow -1&=\frac{a}{4}+\frac{b}{2}-c \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

である。また、

$$f'(x)=2ax-b$$

より、点 $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$ での放物線の接線の傾きは -14 であるから

$$\begin{aligned} f'\left(-\frac{1}{2}\right)&=-14 \\ \Leftrightarrow -a-b&=-14 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。また、軸は $x=\frac{b}{2a}$ であるから

$$\begin{aligned} \frac{b}{2a}&=\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow a&=b \end{aligned}$$

である。これを②に代入すると

$$\begin{aligned} -2a&=-14 \\ \therefore a=b&=7 \end{aligned}$$

が得られるので、①より

$$\begin{aligned} -1&=\frac{7}{4}+\frac{7}{2}-c \\ \Leftrightarrow c&=\frac{25}{4} \end{aligned}$$

である。このとき、

$$\begin{aligned} f(x)&=7x^2-7x-\frac{25}{4} \\ f'(x)&=14x-7 \end{aligned}$$

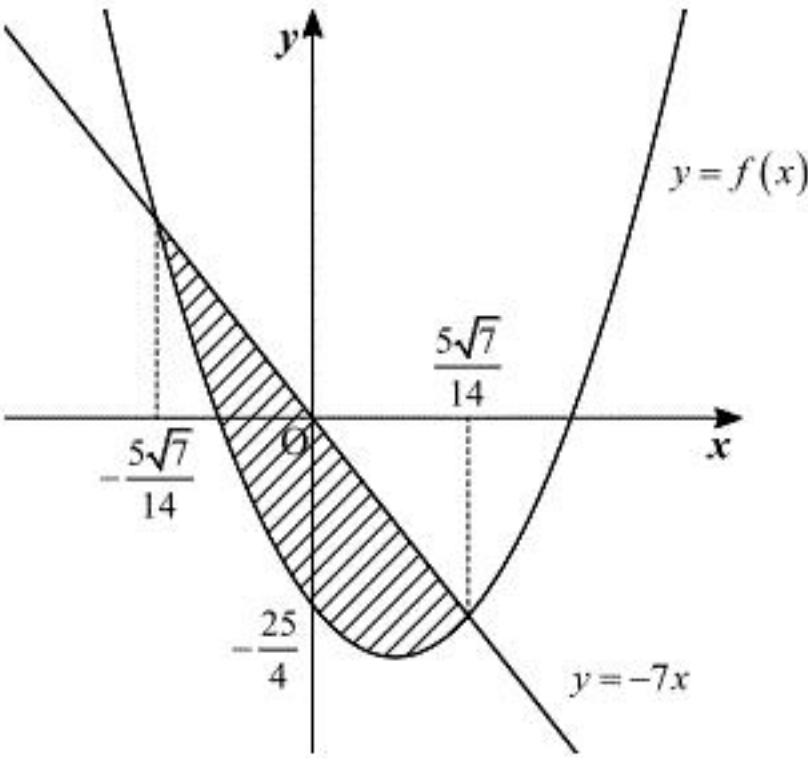
であるから、 C と y 軸との交点 $\left(0,-\frac{25}{4}\right)$ における C の接線 ℓ の方程式は

$$\begin{aligned} y&=f'(0)\cdot x-\frac{25}{4} \\ &=-7x-\frac{25}{4} \end{aligned}$$

となる。原点を通り ℓ に平行な直線 $y=-7x$ と C との交点の x 座標は

$$\begin{aligned} 7x^2-7x-\frac{25}{4}&=-7x \\ \Leftrightarrow 7x^2&=\frac{25}{4} \\ \Leftrightarrow x&=\pm\frac{5\sqrt{7}}{14} \end{aligned}$$

であるから、 C と $y=-7x$ で囲まれる部分は下図の斜線部である。



したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_{-\frac{5\sqrt{7}}{14}}^{\frac{5\sqrt{7}}{14}} \left\{ -7x - \left(7x^2 - 7x - \frac{25}{4} \right) \right\} dx &= - \int_{-\frac{5\sqrt{7}}{14}}^{\frac{5\sqrt{7}}{14}} \left(7x^2 - \frac{25}{4} \right) dx \\ &= -7 \int_{-\frac{5\sqrt{7}}{14}}^{\frac{5\sqrt{7}}{14}} \left(x - \frac{5\sqrt{7}}{14} \right) \left(x + \frac{5\sqrt{7}}{14} \right) dx \\ &= 7 \cdot \frac{\left\{ \frac{5\sqrt{7}}{14} - \left(-\frac{5\sqrt{7}}{14} \right) \right\}^3}{6} \\ &= 7 \frac{\left(\frac{5}{\sqrt{7}} \right)^3}{6} \\ &= \frac{125\sqrt{7}}{42} \end{aligned}$$

となる。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ
	1	2	5

(2)	エ				
	3				

(3)	オ	カ	キ	ク	ケ
	1	4	3	2	4

〔解説〕

(1)

底の変換公式より

$$\begin{aligned}\log_{\frac{1}{2}} 5 &= \frac{\log_2 5}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= -\log_2 5\end{aligned}$$

であるから、関数 $f(x) = \frac{2^x - 2^{-x}}{2}$ に $x = \log_{\frac{1}{2}} 5$ を代入すると

$$\begin{aligned}f\left(\log_{\frac{1}{2}} 5\right) &= \frac{2^{-\log_2 5} - 2^{\log_2 5}}{2} \\ &= \frac{\frac{1}{5} - 5}{2} \\ &= -\frac{12}{5}\end{aligned}$$

となる。

(2)

$f(a) = \frac{4}{3}$ を満たすとき、 2^a の値は

$$\begin{aligned}f(a) &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow \frac{2^a - 2^{-a}}{2} &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 3 \cdot 2^a - 3 \cdot 2^{-a} &= 8 \\ \Leftrightarrow 3(2^a)^2 - 8 \cdot 2^a - 3 &= 0 \quad (\because 2^a > 0) \\ \Leftrightarrow (3 \cdot 2^a + 1)(2^a - 3) &= 0 \\ \therefore 2^a &= 3 \quad (\because 2^a > 0)\end{aligned}$$

と求まる。

(3)

$f(b) = \frac{15}{8}$ を満たすとき、 2^b の値は(2)と同様に考えて

$$\begin{aligned}f(b) &= \frac{15}{8} \\ \Leftrightarrow (4 \cdot 2^b + 1)(2^b - 4) &= 0 \\ \therefore 2^b &= 4 \quad (\because 2^b > 0)\end{aligned}$$

であるから、 $f(b + \log_2 3)$ の値は

$$\begin{aligned}f(b + \log_2 3) &= \frac{2^{b + \log_2 3} - 2^{-(b + \log_2 3)}}{2} \\ &= \frac{2^{\log_2 3} \cdot 2^b - 2^{-\log_2 3} \cdot 2^{-b}}{2} \\ &= \frac{3 \cdot 4 - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}}{2} \\ &= \frac{143}{24}\end{aligned}$$

である。

[解答]

(1)	ア	イ					
	1	2					
(2)	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	7	1	8	1	9	2	3

[解説]

(1)

α を実数として、 $\sin \alpha$ が $8(\sin \alpha)^3 - 6\sin \alpha - 1 = 0$ を満たすとき、

$$8(\sin \alpha)^3 - 6\sin \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin^3 \alpha = \frac{6\sin \alpha + 1}{8}$$

であるから、 $\sin 3\alpha$ の値は3倍角の公式より

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha \\ &= 3\sin \alpha - 4 \cdot \frac{6\sin \alpha + 1}{8} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求まる。

(2)

(1)において、逆に $\sin 3\alpha = -\frac{1}{2}$ を満たすとき $8(\sin \alpha)^3 - 6\sin \alpha - 1 = 0$ が成立することに注意す

ると、 $8(\sin \alpha)^3 - 6\sin \alpha - 1 = 0$ の解は整数 n を用いて

$$8(\sin \alpha)^3 - 6\sin \alpha - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sin 3\alpha = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 3\alpha = \frac{7}{6}\pi + 2n\pi, \frac{11}{6}\pi + 2n\pi$$

$$\therefore \alpha = \frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi, \frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi$$

と表せる。ここで、 $\sin\left(\frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi\right)$ と $\sin\left(\frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi\right)$ の値について、 n を3で割った余りで分類すると以下の表のようになる。

n を3で割ったときの余り	$\sin\left(\frac{7}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi\right)$ の値	$\sin\left(\frac{11}{18}\pi + \frac{2}{3}n\pi\right)$ の値
0	$\sin\left(\frac{7}{18}\pi\right)$	$\sin\left(\frac{11}{18}\pi\right) \left(= \sin\left(\frac{7}{18}\pi\right)\right)$
1	$\sin\left(\frac{19}{18}\pi\right)$	$\sin\left(\frac{23}{18}\pi\right)$
2	$\sin\left(\frac{31}{18}\pi\right) \left(= \sin\left(\frac{23}{18}\pi\right)\right)$	$\sin\left(\frac{35}{18}\pi\right) \left(= \sin\left(\frac{19}{18}\pi\right)\right)$

また、 $\sin\left(\frac{7}{18}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{19}{18}\pi\right)$, $\sin\left(\frac{23}{18}\pi\right)$ はすべて異なる値である。したがって、3次方程式の異なる実数解は3個以下であることから、3次方程式 $8x^3 - 6x - 1 = 0$ の解は

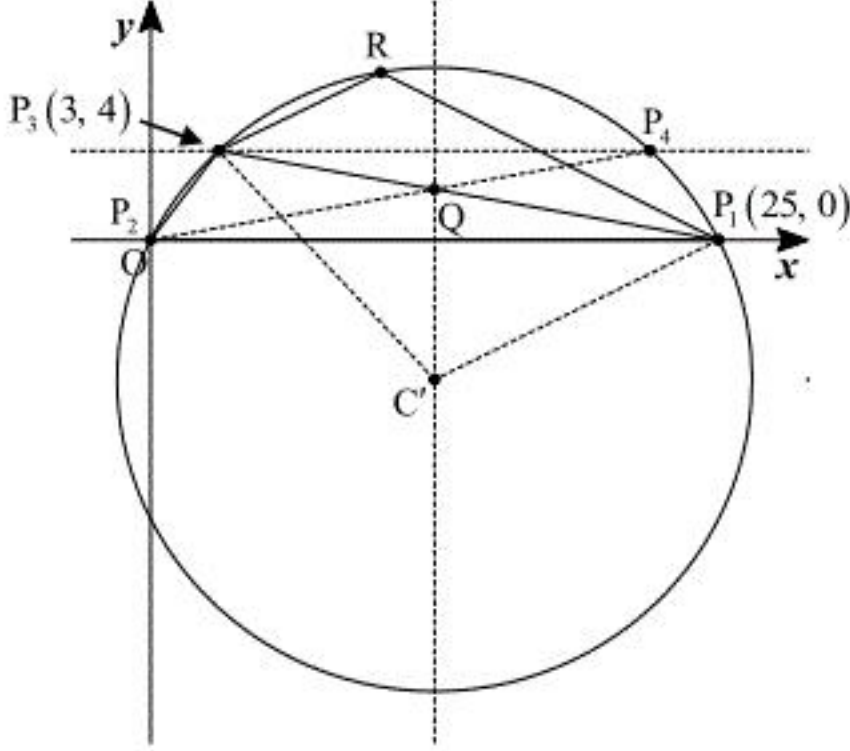
$$x = \sin\left(\frac{7}{18}\pi\right), \sin\left(\frac{19}{18}\pi\right), \sin\left(\frac{23}{18}\pi\right)$$

の3つであることがわかる。

【解答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
2	5	4	5	4	4	1	2	5
コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	
2	4	2	5	2	2	5	2	

【解説】



三角形 $P_1P_2P_3$ の外接円 C は 3 点 P_1, P_2, P_3 を通り、特に $P_2(0, 0)$ を通ることに注意すると、円 C の方程式は実数 a, b を用いて

$$x^2 + y^2 + ax + by = 0$$

と表すことができる。 $P_1(25, 0), P_3(3, 4)$ を通ることから

$$\begin{cases} 25^2 + 25a = 0 \\ 3^2 + 4^2 + 3a + 4b = 0 \end{cases}$$

$$\therefore (a, b) = \left(-25, \frac{25}{2}\right)$$

と求まるので、円 C の半径 R は

$$x^2 + y^2 - 25x + \frac{25}{2}y = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{25}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{25}{4}\right)^2 = \left(\frac{25\sqrt{5}}{4}\right)^2$$

より、 $R = \frac{25\sqrt{5}}{4}$ と求まる。また、上図より P_1 は直線 $x = \frac{25}{2}$ に関して P_2 と対称な位置にあり、

P_4 の定め方から P_4 は直線 $x = \frac{25}{2}$ に関して P_3 と対称な位置にあることがわかる。よって、三角

形 P_1QP_2 は $P_1Q = P_2Q$ の二等辺三角形であるから、2 倍角の公式より $\sin(\angle P_2QP_3)$ は

$$\begin{aligned} \sin(\angle P_2QP_3) &= \sin(\angle QP_1P_2 + \angle QP_2P_1) \\ &= \sin(2\angle QP_1P_2) \\ &= \sin(2\angle P_3P_1P_2) \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、上図より

$$\begin{aligned} P_3P_1 &= \sqrt{(25-3)^2 + (0-4)^2} \\ &= 10\sqrt{5} \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} \sin(\angle P_3P_1P_2) &= \frac{4}{10\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{5}}{25} \\ \cos(\angle P_3P_1P_2) &= \frac{25-3}{10\sqrt{5}} \\ &= \frac{11\sqrt{5}}{25} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \sin(\angle P_2QP_3) &= \sin(2\angle P_3P_1P_2) \\ &= 2\sin(\angle P_3P_1P_2)\cos(\angle P_3P_1P_2) \\ &= 2 \cdot \frac{2\sqrt{5}}{25} \cdot \frac{11\sqrt{5}}{25} \\ &= \frac{44}{125} \end{aligned}$$

と求まる。円 C の中心を C' 、線分 P_1P_3 の中点を M とすると、

$$\begin{aligned} P_3M &= \frac{P_3P_1}{2} \\ &= 5\sqrt{5} \\ P_3C' &= \frac{25\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

であるから $C'M \perp P_3P_1$ より

$$\begin{aligned} C'M &= \sqrt{P_3C'^2 - P_3M^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{25\sqrt{5}}{4}\right)^2 - (5\sqrt{5})^2} \\ &= \frac{15\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

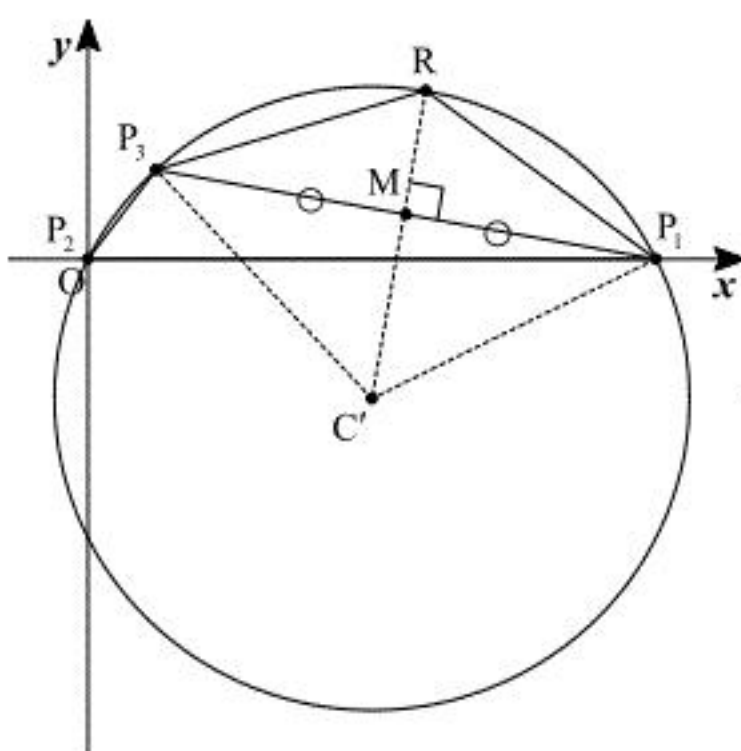
$$\begin{aligned} \sin(\angle P_3C'M) &= \frac{P_3M}{P_3C'} \\ &= \frac{4}{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(\angle P_3C'M) &= \frac{C'M}{P_3C'} \\ &= \frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \sin(2\pi - \angle P_3C'P_1) \\ &= \sin(\angle P_3C'P_1) \\ &= \sin(2\angle P_3C'M) \\ &= 2\sin(\angle P_3C'M)\cos(\angle P_3C'M) \\ &= 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} \\ &= \frac{24}{25} \end{aligned}$$

となる。



弧 $P_1P_4P_3$ 上の点 R を、四角形 $P_1P_2P_3R$ の面積が最大になるとき、三角形 P_1RP_3 の面積も最大であるから、点 R は線分 P_1P_3 の垂直二等分線上にある。このときの三角形 P_1RP_3 の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot P_1P_3 \cdot RM &= \frac{1}{2} \cdot P_1P_3 \cdot (RC' - MC') \\ &= \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{5} \cdot \left(\frac{25\sqrt{5}}{4} - \frac{15\sqrt{5}}{4}\right) \\ &= \frac{125}{2} \end{aligned}$$

である。三角形 $P_1P_2P_3$ の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 25 \cdot 4 = 50$$

であるから、四角形 $P_1P_2P_3R$ の面積は

$$\frac{125}{2} + 50 = \frac{225}{2}$$

である。