

1

【解答】

(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク
	2	3	3	2	2	7	1	4
	ケ	コ	サ	シ				
	9	3	5	4				
(2)	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ		
	2	1	7	8	1	7		
(3)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ
	9	1	2	1	6	6	1	2
	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ	ム	
	1	6	7	2	7	1	2	

【解説】

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{3}x(x-1)(x-c) \\ &= \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}(c+1)x^2 + \frac{c}{3}x \end{aligned}$$

を x で微分すると

$$f'(x) = x^2 - \frac{2}{3}(c+1)x + \frac{c}{3}$$

となる。 $f'(\alpha) = 0, f'(\beta) = 0$ および $\alpha < \beta$ より、 $x = \alpha, \beta$ は $f'(x) = 0$ の異なる2解となるため、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2}{3}(c+1) \\ \alpha\beta = \frac{1}{3}c \end{cases}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \frac{1}{3} \{ (\alpha^3 - \beta^3) - (c+1)(\alpha^2 - \beta^2) + c(\alpha - \beta) \} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha - \beta) \{ (\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) - (c+1)(\alpha + \beta) + c \} \\ &= \frac{1}{3}(\alpha - \beta) \{ (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - (c+1)(\alpha + \beta) + c \} \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = \frac{1}{3} \{ (\alpha + \beta)^2 - \alpha\beta - (c+1)(\alpha + \beta) + c \} \quad (\because \alpha - \beta < 0)$$

より、

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = -\frac{2}{27}(c^2 - c + 1)$$

が得られる。また、 $(\alpha - \beta)^2$ は

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left\{ \frac{2}{3}(c+1) \right\}^2 - 4 \cdot \frac{1}{3}c \\ &= \frac{4}{9}(c^2 - c + 1) \end{aligned}$$

となる。 $\alpha < \beta$ より

$$\alpha - \beta = -\frac{2}{3}\sqrt{c^2 - c + 1}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= -\frac{2}{27}(c^2 - c + 1) \cdot (\alpha - \beta) \\ &= -\frac{2}{27}(c^2 - c + 1) \cdot \left(-\frac{2}{3}\sqrt{c^2 - c + 1} \right) \end{aligned}$$

となり、 $c = \frac{1}{2}$ を代入すると

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\sqrt{3}}{54}$$

が得られる。

(2)

(a)

2倍角の公式より

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \cos(2^n\theta) \\ &= 2\cos^2(2^{n-1}\theta) - 1 \\ &= 2a_n^2 - 1 \end{aligned}$$

と表すことができる。

(b)

$\cos\theta = \frac{1}{3}$ より $a_1 = \frac{1}{3}$ であるから

$$\begin{aligned} a_2 &= 2a_1^2 - 1 \\ &= -\frac{7}{9} \\ a_3 &= 2a_2^2 - 1 \\ &= \frac{17}{81} \end{aligned}$$

となる。

(c)

$a_{n+1} = a_n$ のとき

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n \\ \Leftrightarrow 2a_n^2 - 1 &= a_n \\ \Leftrightarrow (2a_n + 1)(a_n - 1) &= 0 \\ \therefore a_n &= 1, -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となる。このとき、

$$2^{n-1}\theta = \frac{2}{3}m\pi$$

を満たす整数 m が存在し、 $\theta = \frac{5}{96}\pi$ を代入すると

$$\begin{aligned} 2^{n-1} \cdot \frac{5}{96}\pi &= \frac{2}{3}m\pi \\ \Leftrightarrow m &= 5 \cdot 2^{n-7} \end{aligned}$$

となる。従って、 m が整数となるときの最小の正の整数 n は $n=7$ のときである。

(3)

(a)

1の目が少なくとも1つ出るという事象の余事象は1の目が1つも出ないことであり、その確率は

$$\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

である。従って、求める確率は

$$1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$$

である。

(b)

求める確率は5以下の目のみが出る確率から4以下の目のみが出る確率を引いたものであるから、

$$\begin{aligned} \left(\frac{5}{6}\right)^3 - \left(\frac{4}{6}\right)^3 &= \frac{125}{216} - \frac{64}{216} \\ &= \frac{61}{125} \end{aligned}$$

となる。

(c)

中のさいころの目を k とする。ここで、 k は1以上6以下の自然数である。条件を満たすとき、

小のさいころの目は1以上 k 以下、大のさいころの目は k 以上6以下であるから、このような出方は

$$k(7-k) \text{ (通り)}$$

ある。ここで、 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ であるから、題意の目の出方は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^6 k(7-k) &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + 5 \cdot 2 + 6 \cdot 1 \\ &= 56 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

である。従って、求める確率は

$$\frac{56}{6^3} = \frac{7}{27}$$

である。

(d)

大と小のさいころの目の平均が整数になるのは、大と小のさいころの目の偶奇が一致するときである。このとき、中に出るべき目は1つに定まるので、題意の目の出方は

$$3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 = 18 \text{ (通り)}$$

である。従って、求める確率は

$$\frac{18}{6^3} = \frac{1}{12}$$

である。

(1)

 $f(x)$ を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= -5px^{p-1} \log x - 5x^{p-1} \\ &= -5x^{p-1}(p \log x + 1) \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。 $f'(a) = 0$ より

$$-5a^{p-1}(p \log a + 1) = 0$$

となるが、 $a > 0$ より

$$p \log a = -1$$

$$\Leftrightarrow a = e^{-\frac{1}{p}}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a = e^{-\frac{1}{p}}$$

(2)

部分積分より

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \left(-\frac{5}{p+1} x^{p+1} \right)' \log x dx \\ &= -\frac{5}{p+1} x^{p+1} \log x - \int \left(-\frac{5}{p+1} x^p \right) dx \\ &= -\frac{5}{p+1} x^{p+1} \log x + \frac{5}{(p+1)^2} x^{p+1} + C \end{aligned}$$

となる。ここで、 C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \int f(x) dx = -\frac{5}{(p+1)^2} x^{p+1} \{(p+1) \log x - 1\} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

$a \leq x \leq 1$ において、 $\textcircled{1}$ より $f'(x) \leq 0$ であるから $f(x)$ は単調非増加である。また、 $f(1) = 0$ より $a \leq x \leq 1$ で $f(x) \geq 0$ とわかる。従って、 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_a^1 f(x) dx \\ &= -\frac{5}{(p+1)^2} \left[x^{p+1} \{(p+1) \log x - 1\} \right]_a^1 \\ &= -\frac{5}{(p+1)^2} \{-1 - a^{p+1}(p \log a + \log a - 1)\} \end{aligned}$$

となる。 a を p で表すと

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{(p+1)^2} \left\{ 1 + e^{-1-\frac{1}{p}} \left(-1 - \frac{1}{p} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{5}{(p+1)^2} \left\{ 1 + e^{-1} \cdot \frac{e^{-\frac{1}{p}}}{p} (-2p-1) \right\} \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned} \lim_{p \rightarrow +0} S &= \frac{5}{(0+1)^2} \cdot \{1 + e^{-1} \cdot 0 \cdot (-1)\} \\ &= 5 \end{aligned}$$

とわかる。

(答) 5

3

(1)

$f(x)$ を x で微分すると

$$f'(x) = a - 2ax$$

となるので、点 $(1, 0)$ における接線 ℓ_1 の方程式は

$$y = -a(x-1)$$

となる。 ℓ_1 と ℓ_2 の交点の x 座標は

$$-a(x-1) = -x$$

$$\Leftrightarrow (a-1)x = a$$

を満たす。 $a \neq 1$ より

$$x = \frac{a}{a-1}$$

である。また、交点は ℓ_2 上にあるから y 座標は

$$y = -\frac{a}{a-1}$$

である。

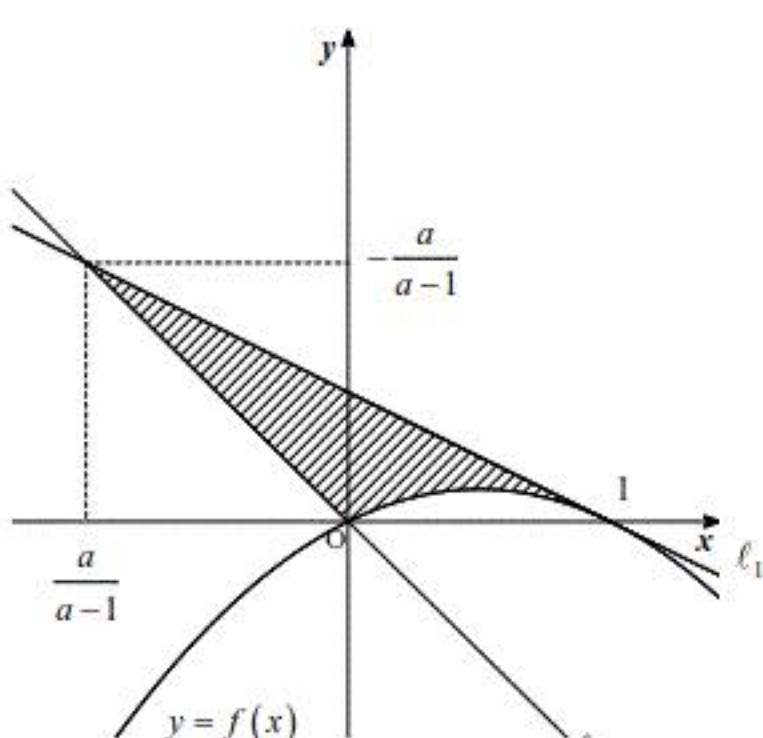
$$(\text{答}) \left(\frac{a}{a-1}, -\frac{a}{a-1} \right)$$

(2)

(1) で求めた交点の y 座標の正負により場合分けをする

[1] $0 < a < 1$ のとき

グラフの概形は下のようになる。



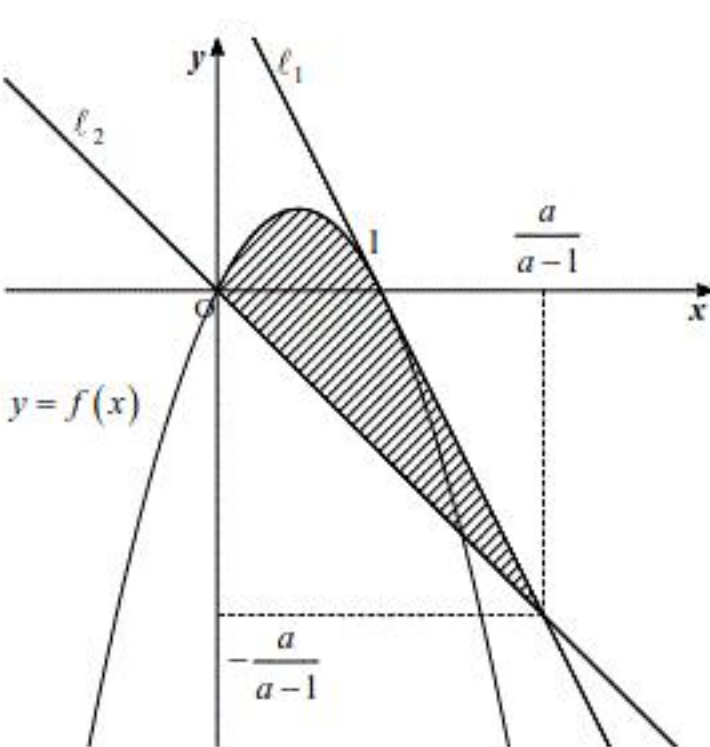
従って、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \left(-\frac{a}{a-1} \right) - \int_0^1 f(x) dx \\ &= -\frac{a}{2(a-1)} - \int_0^1 -ax(x-1) dx \\ &= -\frac{a}{2(a-1)} - \left\{ \frac{a}{6} (1-0)^3 \right\} \\ &= -\frac{a(a+2)}{6(a-1)} \end{aligned}$$

となる。

[2] $a > 1$ のとき

グラフの概形は下のようになる。



従って、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{a}{a-1} + \int_0^1 f(x) dx \\ &= \frac{a}{2(a-1)} + \int_0^1 -ax(x-1) dx \\ &= \frac{a}{2(a-1)} + \left\{ \frac{a}{6} (1-0)^3 \right\} \\ &= \frac{a(a+2)}{6(a-1)} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より求める面積は

$$S = \frac{a(a+2)}{6|a-1|}$$

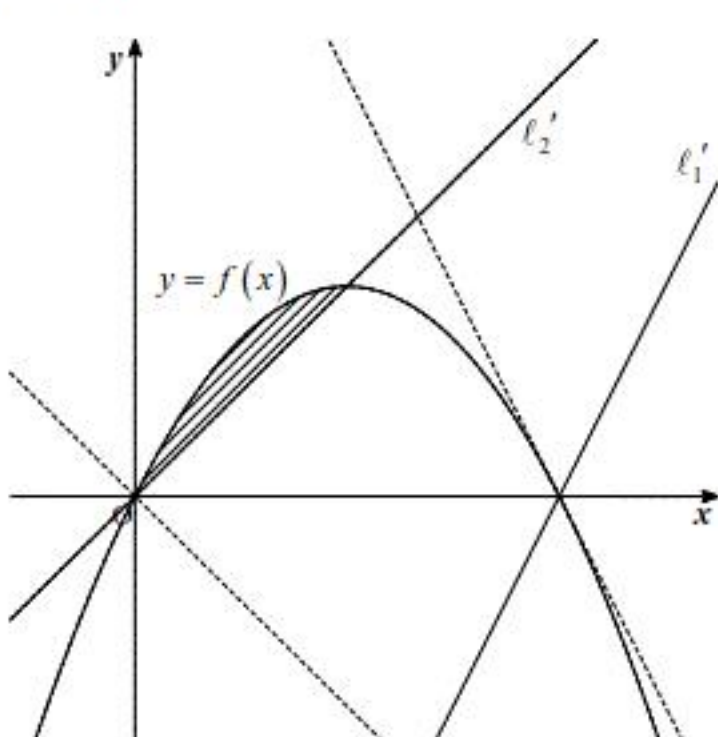
となる。

$$(\text{答}) S = \frac{a(a+2)}{6|a-1|}$$

(3)

$a > 1$ のとき、 x 軸に関して ℓ_1, ℓ_2 と対称な直線を ℓ'_1, ℓ'_2 とすると、 $V-U$ は下図斜線部を x 軸

周りに回転させた立体の体積である。



ℓ'_2 は $y=x$ より、 ℓ'_2 と C の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} ax(1-x) &= x \\ \Leftrightarrow x\{ax - (a-1)\} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore x = 0, \frac{a-1}{a}$$

となる。これより

$$\begin{aligned} V-U &= \pi \int_0^{\frac{a-1}{a}} \left(a^2 x^2 (1-x)^2 - x^2 \right) dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{a-1}{a}} \left\{ a^2 x^4 - 2a^2 x^3 + (a^2-1)x^2 \right\} dx \\ &= \pi \left[\frac{a^2}{5} x^5 - \frac{a^2}{2} x^4 + \frac{a^2-1}{3} x^3 \right]_0^{\frac{a-1}{a}} \\ &= \pi \left\{ \frac{(a-1)^5}{5a^3} - \frac{(a-1)^4}{2a^2} + \frac{(a+1)(a-1)^4}{3a^3} \right\} \\ &= \frac{(a-1)^4}{30a^3} \pi \{ 6(a-1) - 15a + 10(a+1) \} \\ &= \frac{(a-1)^4}{30a^3} \pi (a+4) \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{30a^3}{(a-1)^4} (V-U) = a+4$$

がわかる。

$$(\text{答}) a+4$$

(4)

(3)より

$$V = \frac{(a-1)^4}{30a^3} \pi (a+4) + U$$

と表せる。ここで、 U は底面の半径が $\frac{a}{a-1}$ で高さが $\frac{a}{a-1}$ である円錐から、底面の半径が

$\frac{a}{a-1}$ で高さが $\frac{a}{a-1} - 1$ の円錐をくりぬいたものと考え、

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{a-1} \right)^2 \left\{ \frac{a}{a-1} - \left(\frac{a}{a-1} - 1 \right) \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{a-1} \right)^2 \end{aligned}$$

となる。以上より

$$\begin{aligned} (a-1)^2 V &= (a-1)^2 \left\{ \frac{(a-1)^4}{30a^3} \pi (a+4) + \frac{\pi}{3} \left(\frac{a}{a-1} \right)^2 \right\} \\ &= \frac{(a-1)^6}{30a^3} \pi (a+4) + \frac{\pi}{3} a^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\lim_{a \rightarrow 1+0} (a-1)^2 V = \lim_{a \rightarrow 1+0} \left\{ \frac{(a-1)^6}{30a^3} \pi (a+4) + \frac{\pi}{3} a^2 \right\}$$

$$= \frac{\pi}{3}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \frac{\pi}{3}$$