

1

【解答】

|     |   |   |   |   |   |   |   |   |
|-----|---|---|---|---|---|---|---|---|
| (1) | ア | イ | ウ | エ | オ | カ | キ | ク |
|     | 3 | 0 | 2 | 2 | 8 | 2 | 1 | 4 |
|     | ケ | コ | サ |   |   |   |   |   |
|     | 8 | 1 | 2 |   |   |   |   |   |
| (2) | シ | ス | セ | ソ | タ | チ | ツ |   |
|     | 5 | 3 | 3 | 5 | 3 | 3 | 1 |   |
| (3) | テ | ト | ナ | ニ | ヌ | ネ | ノ | ハ |
|     | 3 | 3 | 2 | 1 | 2 | 0 | 1 | 3 |
|     | ヒ | フ | ヘ | ホ | マ | ミ | ム | メ |
|     | 1 | 3 | 5 | 1 | 0 | 5 | 2 | 1 |
|     | モ | ヤ | ユ | ヨ |   |   |   |   |
|     | 3 | 2 | 3 | 3 |   |   |   |   |

【解説】

(1)(a)

$$\begin{aligned}g(x) &< f(x) \\ \Leftrightarrow f(x) - g(x) &> 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2(a^2 - 2)x + a^4 + a^3 - a^2 + 4 &> 0\end{aligned}$$

となる。これがすべての  $x$  に対して成り立つための必要十分条件は、判別式を  $D$  とすると

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &< 0 \\ \Leftrightarrow (a^2 - 2)^2 - (a^4 + a^3 - a^2 + 4) &< 0 \\ \Leftrightarrow -a^3 - 3a^2 &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2(a + 3) &> 0 \\ \therefore a > -3 \text{ かつ } a \neq 0\end{aligned}$$

となる。

(b)

$$\begin{aligned}g(x) &= -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16 \\ &= -\left\{x - (a^2 - 4)\right\}^2 - 2a^4 - 2a^3 - 8a^2\end{aligned}$$

と変形できるので、 $g(x)$  の最大値は  $-2a^4 - 2a^3 - 8a^2$  となる。

(c)

条件(\*)を満たす実数  $b$  がただ1つ存在するための必要十分条件は、 $f(x)$  の最小値と  $g(x)$  の最大値が等しいことである。ここで

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8 \\ &= (x - a^2)^2 - 2a^4 - 2a^2 - 8\end{aligned}$$

と変形できるので、 $f(x)$  の最小値は  $-2a^4 - 2a^2 - 8$  となる。したがって、 $f(x)$  の最小値と

$g(x)$  の最大値が等しいとき

$$\begin{aligned}-2a^4 - 2a^2 - 8 &= -2a^4 - 2a^3 - 8a^2 \\ \Leftrightarrow a^3 + 3a^2 - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a^2 + 4a + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 1)(a + 2)^2 &= 0 \\ \therefore a &= -2, 1\end{aligned}$$

となる。 $a = -2$  のとき

$$\begin{aligned}b &= -2 \cdot (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 - 8 \\ &= -48\end{aligned}$$

となる。 $a = 1$  のとき

$$\begin{aligned}b &= -2 \cdot 1^4 - 2 \cdot 1^2 - 8 \\ &= -12\end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n & \cdots \textcircled{1} \\ b_{n+1} = -25a_n - 2b_n & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

実数  $p, q$  を用いて

$$pa_{n+1} + b_{n+1} = q(pa_n + b_n)$$

とおくと

$$\begin{aligned}pa_{n+1} + b_{n+1} &= q(pa_n + b_n) \\ \Leftrightarrow p(8a_n + b_n) + (-25a_n - 2b_n) &= q(pa_n + b_n) \\ \Leftrightarrow (-pq + 8p - 25)a_n + (p - q - 2)b_n &= 0 \quad \cdots \textcircled{3}\end{aligned}$$

となる。いま、 $-pq + 8p - 25 \neq 0$  と仮定すると、すべての  $n$  に対して

$$a_n = -\frac{p - q - 2}{-pq + 8p - 25}b_n$$

となる。 $a_1 = 1, b_1 = -2$  より、すべての  $n$  に対して

$$a_n = -\frac{1}{2}b_n$$

となる。これを①に代入すると  $a_{n+1} = 6a_n$  となり、②に代入すると  $a_{n+1} = \frac{21}{2}a_n$  となるので、矛

盾する。したがって仮定は誤りであり

$$-pq + 8p - 25 = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$

となる。このとき、③より

$$(p - q - 2)b_n = 0$$

となるが、 $b_1 = -2$  より

$$\begin{aligned}p - q - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow q &= p - 2\end{aligned}$$

となる。これを④に代入すると

$$\begin{aligned}-p(p - 2) + 8p - 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow p^2 - 10p + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow (p - 5)^2 &= 0 \\ \therefore p &= 5\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}q &= 5 - 2 \\ &= 3\end{aligned}$$

となる。よって

$$5a_{n+1} + b_{n+1} = 3(5a_n + b_n)$$

が成り立つ。この漸化式より

$$\begin{aligned}5a_n + b_n &= 3^{n-1}(5a_1 + b_1) \\ &= 3^{n-1}(5 \cdot 1 - 2) \\ &= 3^n\end{aligned}$$

となるので

$$b_n = 3^n - 5a_n$$

となる。これを①に代入すると

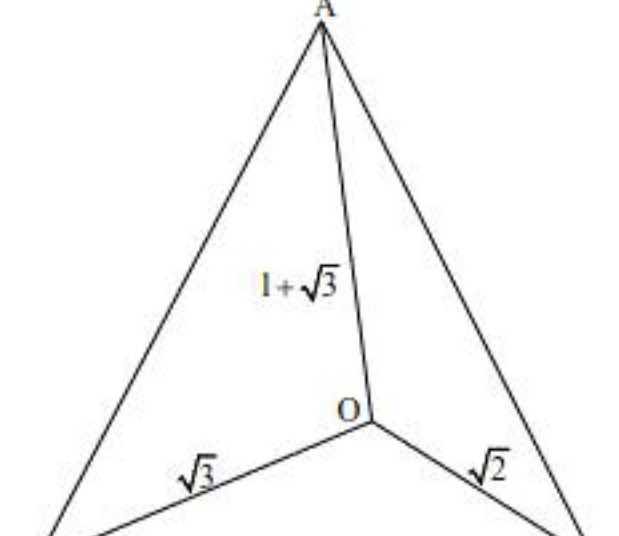
$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 8a_n + 3^n - 5a_n \\ \Leftrightarrow a_{n+1} &= 3a_n + 3^n \\ \Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{3^n} &= \frac{a_n}{3^{n-1}} + 1\end{aligned}$$

となる。この漸化式より

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{3^{n-1}} &= n - 1 + \frac{a}{3^0} \\ &= n \\ \therefore a_n &= n \cdot 3^{n-1}\end{aligned}$$

となる。

(3)



$$\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}3\vec{OC} &= -(\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB}) \\ \Leftrightarrow |3\vec{OC}|^2 &= |-(\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB})|^2 \\ \Leftrightarrow 9|\vec{OC}|^2 &= 3|\vec{OA}|^2 + 4|\vec{OB}|^2 + 4\sqrt{3}\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ \Leftrightarrow 9(\sqrt{2})^2 &= 3(1 + \sqrt{3})^2 + 4(\sqrt{3})^2 + 4\sqrt{3}\vec{OA} \cdot \vec{OB} \\ \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OB} &= \frac{-3 - \sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\cos \angle AOB &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OB}}{|\vec{OA}||\vec{OB}|} \\ &= \frac{\frac{-3 - \sqrt{3}}{2}}{(1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2}\end{aligned}$$

となる。 $0^\circ < \angle AOB < 180^\circ$  より

$$\angle AOB = 120^\circ$$

となる。同様にして、 $\sqrt{3}\vec{OA} + 2\vec{OB} + 3\vec{OC} = \vec{0}$  より

$$\begin{aligned}2\vec{OB} &= -(\sqrt{3}\vec{OA} + 3\vec{OC}) \\ \Leftrightarrow |2\vec{OB}|^2 &= |-(\sqrt{3}\vec{OA} + 3\vec{OC})|^2 \\ \Leftrightarrow 4|\vec{OB}|^2 &= 3|\vec{OA}|^2 + 9|\vec{OC}|^2 + 6\sqrt{3}\vec{OA} \cdot \vec{OC} \\ \Leftrightarrow 4(\sqrt{3})^2 &= 3(1 + \sqrt{3})^2 + 9(\sqrt{2})^2 + 6\sqrt{3}\vec{OA} \cdot \vec{OC} \\ \therefore \vec{OA} \cdot \vec{OC} &= -1 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\cos \angle AOC &= \frac{\vec{OA} \cdot \vec{OC}}{|\vec{OA}||\vec{OC}|} \\ &= \frac{-1 - \sqrt{3}}{(1 + \sqrt{3}) \cdot \sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

となる。 $0^\circ < \angle AOC < 180^\circ$  より

$$\angle AOC = 135^\circ$$

となる。したがって

$$\begin{aligned}\angle BOC &= 360^\circ - \angle AOB - \angle AOC \\ &= 105^\circ\end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned}\sin 105^\circ &= \sin(60^\circ + 45^\circ) \\ &= \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \cos 60^\circ \sin 45^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}(1 + \sqrt{3})}{4}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\triangle ABC$  の面積は

$$\frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OB} \sin \angle AOB + \frac{1}{2}\vec{OA} \cdot \vec{OC} \sin \angle AOC + \frac{1}{2}\vec{OB} \cdot \vec{OC} \sin \angle BOC = 2 + \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

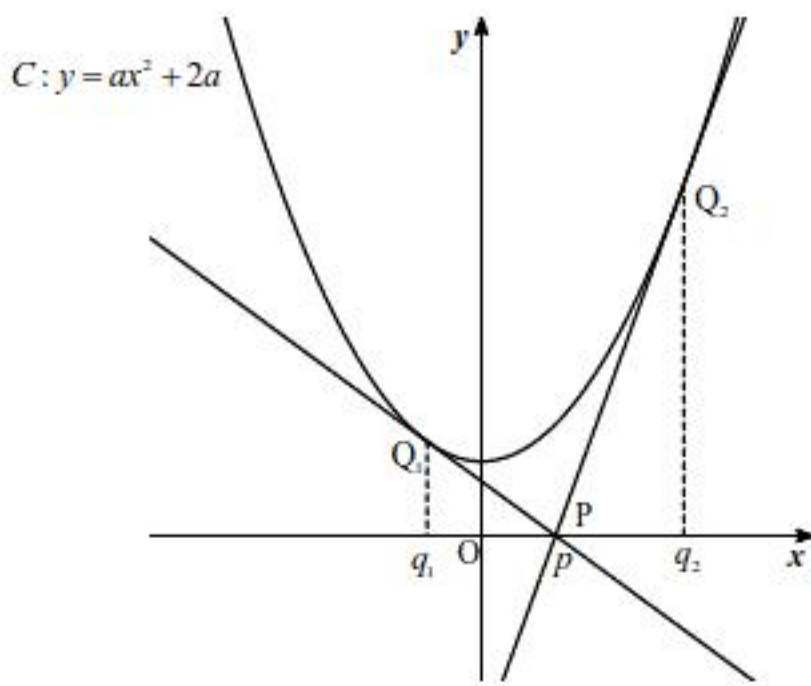
となる。



2

(1)

放物線  $C$  および 3 点  $P, Q_1, Q_2$  を図示すると以下ようになる。



$C$  の方程式の導関数は

$$y' = 2ax$$

である。 $t$  を実数とすると、 $C$  上の点  $(t, at^2 + 2a)$  における接線は

$$\begin{aligned} y &= 2at(x - t) + at^2 + 2a \\ &= 2atx - at^2 + 2a \end{aligned}$$

と表せる。これが、点  $P$  を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= 2atp - at^2 + 2a \\ \Leftrightarrow t^2 - 2pt - 2 &= 0 \quad (\because a \neq 0) \quad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow t = p \pm \sqrt{p^2 + 2}$$

となる。 $q_1 < q_2$  より

$$q_1 = p - \sqrt{p^2 + 2}, q_2 = p + \sqrt{p^2 + 2}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad q_1 = p - \sqrt{p^2 + 2}, q_2 = p + \sqrt{p^2 + 2}$$

(2)

$Q_1(q_1, a(q_1^2 + 2)), Q_2(q_2, a(q_2^2 + 2))$  より求める直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= \frac{a(q_1^2 + 2) - a(q_2^2 + 2)}{q_1 - q_2}(x - q_1) + a(q_1^2 + 2) \\ &= \frac{a(q_1^2 - q_2^2)}{q_1 - q_2}(x - q_1) + a(q_1^2 + 2) \\ &= a(q_1 + q_2)(x - q_1) + a(q_1^2 + 2) \\ &= a(q_1 + q_2)x - aq_1q_2 + 2a \end{aligned}$$

となる。ここで①の解と係数の関係より

$$\begin{cases} q_1 + q_2 = 2p \\ q_1q_2 = -2 \end{cases}$$

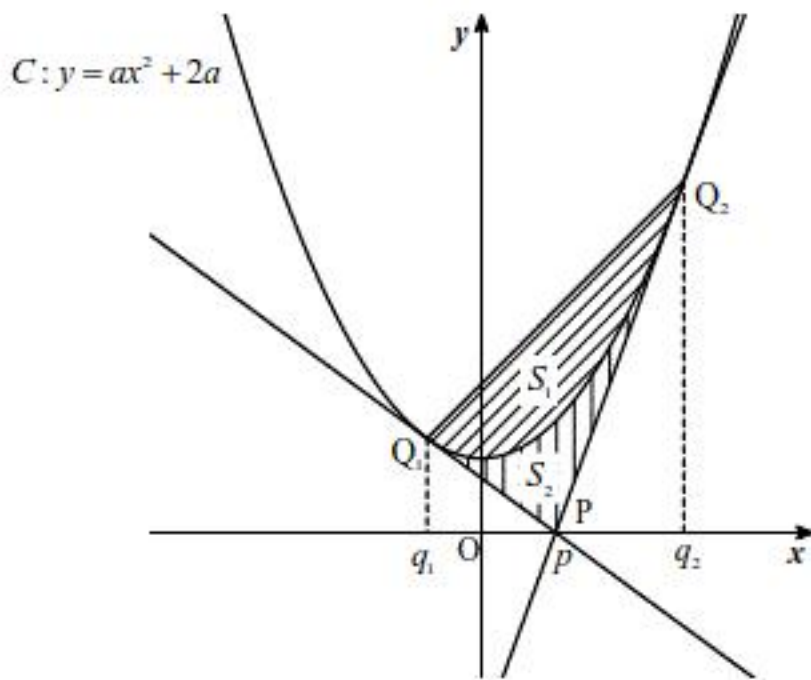
であるから

$$y = 2apx + 4a$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad y = 2apx + 4a$$

(3)



$S_1, S_2$  はそれぞれ上図の斜線部、縦線部の面積である。(2)より、 $S_1$  は

$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{q_1}^{q_2} \{(2apx + 4) - (ax^2 + 2a)\} dx \\ &= -a \int_{q_1}^{q_2} (x^2 - 2px - 2) dx \\ &= -a \int_{q_1}^{q_2} (x - q_1)(x - q_2) dx \\ &= \frac{a}{6} (q_2 - q_1)^3 \\ &= \frac{a}{6} \left\{ (p + \sqrt{p^2 + 2}) - (p - \sqrt{p^2 + 2}) \right\}^3 \\ &= \frac{4a}{3} (p^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ_1} &= (q_1 - p, a(q_1^2 + 2)) \\ \overrightarrow{PQ_2} &= (q_2 - p, a(q_2^2 + 2)) \end{aligned}$$

より、 $\triangle PQ_1Q_2$  の面積は

$$\begin{aligned} \triangle PQ_1Q_2 &= \frac{1}{2} \left| (q_1 - p) \cdot a(q_2^2 + 2) - (q_2 - p) \cdot a(q_1^2 + 2) \right| \\ &= \frac{a}{2} \left| \sqrt{p^2 + 2} (q_1^2 + q_2^2 + 4) \right| \\ &= \frac{a}{2} \left| \sqrt{p^2 + 2} \cdot 4(p^2 + 2) \right| \\ &= 2a (p^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。従って、 $S_2$  は

$$\begin{aligned} S_2 &= \triangle PQ_1Q_2 - S_1 \\ &= \frac{2}{3} a (p^2 + 2)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

となり

$$\frac{S_1}{S_2} = 2$$

が得られる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = \frac{4}{3} a (p^2 + 2)^{\frac{3}{2}}, S_2 = \frac{2}{3} a (p^2 + 2)^{\frac{3}{2}}, \frac{S_1}{S_2} = 2$$

(4)

$\overrightarrow{PQ_1}, \overrightarrow{PQ_2}$  の内積が 0 になればよい。

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} &= (q_1 - p)(q_2 - p) + a^2 (q_1^2 + 2)(q_2^2 + 2) \\ &= -(p^2 + 2) + a^2 \left\{ 2(p^2 + 2) - 2p\sqrt{p^2 + 2} \right\} \left\{ 2(p^2 + 2) + 2p\sqrt{p^2 + 2} \right\} \\ &= -(p^2 + 2) + 4a^2 \left\{ (p^2 + 2)^2 - p^2 (p^2 + 2) \right\} \\ &= (p^2 + 2)(-1 + 8a^2) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ_1} \cdot \overrightarrow{PQ_2} &= 0 \\ \Leftrightarrow (p^2 + 2)(-1 + 8a^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -1 + 8a^2 &= 0 \end{aligned}$$

となる。 $a > 0$  であるから

$$\begin{aligned} a^2 &= \frac{1}{8} \\ \therefore a &= \frac{\sqrt{2}}{4} \end{aligned}$$

とわかる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

(1)

実数  $\theta$  は  $f(\theta) = 0$  を満たすので,

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 0 \\ \Leftrightarrow a \sin 2\theta - \tan \theta &= 0 \\ \Leftrightarrow a \cdot 2 \sin \theta \cos \theta - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \theta (2a \cos^2 \theta - 1)}{\cos \theta} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  より  $\sin \theta \neq 0$  である。また、 $a > \frac{1}{2}$  より、 $2a \cos^2 \theta = 1$  を満たす

$\theta$  は常に存在するので,

$$\begin{aligned} \frac{\sin \theta (2a \cos^2 \theta - 1)}{\cos \theta} &= 0 \\ \Leftrightarrow 2a \cos^2 \theta - 1 &= 0 \\ \therefore \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{2a}} \quad (\because \cos \theta > 0) \end{aligned}$$

と表すことができる。

$$(\text{答}) \quad \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

(2)

$C$  を積分定数とすると、与えられた不定積分は、

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int (a \sin 2x - \tan x) dx \\ &= a \int \sin 2x dx - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \\ &= -\frac{a}{2} \cos 2x + \log |\cos x| + C \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \int f(x) dx = -\frac{a}{2} \cos 2x + \log |\cos x| + C$$

(3)

$f(x) = 0$  を満たす  $x$  は、(1) より、

$$\cos x = \frac{1}{\sqrt{2a}}$$

と表される。ここで、 $\frac{1}{2} < a < 1$  より、この  $x$  は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} &< \frac{1}{\sqrt{2a}} < 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} &< \cos x < 1 \\ \therefore 0 &< x < \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

を満たす。この  $x$  を  $\alpha$  とおくと、 $0 < x < \alpha$  のとき  $f(x) > 0$  であり、 $\alpha < x < \frac{\pi}{4}$  のとき  $f(x) < 0$

であるから、(2) より、

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx + \log a &= \int_0^{\alpha} f(x) dx - \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx + \log a \\ &= \left[ -\frac{a}{2} \cos 2x + \log |\cos x| \right]_0^{\alpha} - \left[ -\frac{a}{2} \cos 2x + \log |\cos x| \right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}} + \log a \\ &= 2 \left( -\frac{a}{2} \cos 2\alpha + \log |\cos \alpha| \right) + \frac{a}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} + \log a \\ &= -a(2 \cos^2 \alpha - 1) + \log \cos^2 \alpha + \frac{a}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} + \log a \\ &= -a \left( 2 \cdot \frac{1}{2a} - 1 \right) + \log \frac{1}{2a} + \frac{a}{2} - \log \frac{1}{\sqrt{2}} + \log a \left( \because \cos^2 \alpha = \frac{1}{2a} \right) \\ &= -1 + a - \log 2 - \log a + \frac{a}{2} + \frac{1}{2} \log 2 + \log a \\ &= \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} \log 2 - 1 \end{aligned}$$

と求めることができる。

$$(\text{答}) \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx + \log a = \frac{3}{2} a - \frac{1}{2} \log 2 - 1$$