

1

〔解答〕

	(a)					(b)					(c)				(d)			
(1)	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ
	8	1	2	5	6	1	7	5	2	5	6	2	7	6	4	3	3	2

(2)	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	1	1	2	1	4	2	5	3	5	1	4	1	5

	(a)		(b)				(c)
(3)	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ
	7	4	7	4	2	1	2

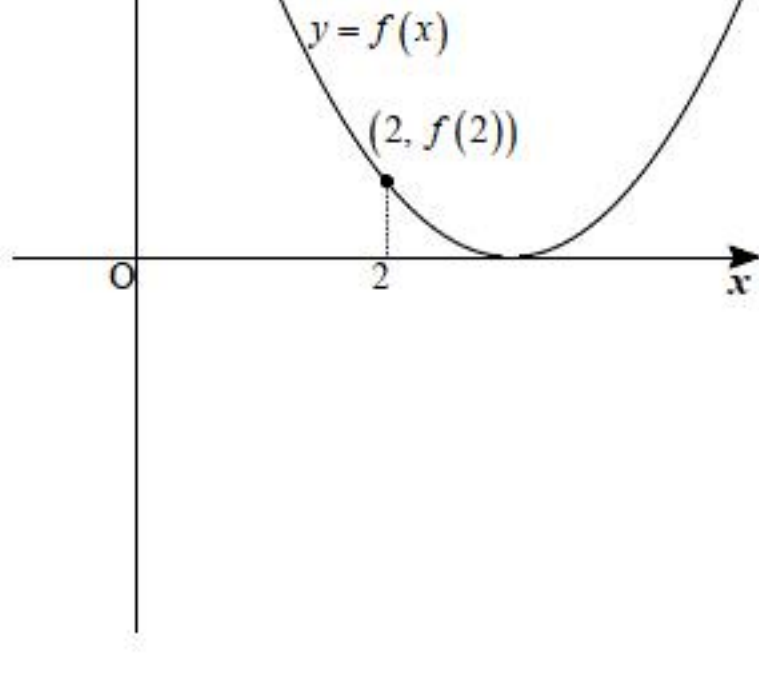
〔解説〕

(1)

- 【解説】
- (1)
- (a)
- ある人が「はずれ」を引かない確率は、
- $$1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$
- であるから、4人がそれぞれ1回ずつくじを引くときに誰もはずれを引かない確率は、
- $$\left(\frac{3}{4}\right)^4=\frac{81}{256}$$
- である。
- (b)
- 『少なくとも1人が「A賞」を引く』という事象の余事象は、『誰も「A賞」を引かない』という事象である。誰も「A賞」を引かない確率は(a)と同様に考えて $\frac{81}{256}$ であるから、少なくとも1人が「A賞」を引く確率は、
- $$1-\frac{81}{256}=\frac{175}{256}$$
- と求めることができる。
- (c)
- 「A賞」を引く人を4人から選ぶときの選び方は4通り存在し、「A賞」を引く確率は $\frac{1}{4}$ 、「A賞」以外を引く確率は $\frac{3}{4}$ であるから、4人のうち誰か1人だけが「A賞」を引く確率は、
- $$4\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}$$
- である。
- (d)
- 「A賞」「B賞」「C賞」「はずれ」がそれぞれ1つつ出るということは、1人目はどのくじを引いてもよく、2人目は1人目が引いたくじ以外を引き、3人目は1人目と2人目が引いたくじ以外を引き、4人目は残る1つのくじを引くということである。従って、「A賞」「B賞」「C賞」「はずれ」がそれぞれ1つつ出る確率は、
- $$1\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$$
- である。

- (2)
- 題意より、
- $$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_0(t) \sin t dt \\ &= \left[-\cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 1 \end{aligned}$$
- と求めることができる。また、 $n \geq 2$ のとき、
- $$\begin{aligned} c_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-1}(t) \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{t}{2} - \frac{\cos t}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-2}(t) \sin t dt \right\} \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t}{2} - \frac{\cos t}{2} c_{n-1} \right) \sin t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin t dt - \frac{1}{4} c_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t(-\cos t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt - \frac{1}{4} c_{n-1} \left[-\frac{\cos 2t}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{4} c_{n-1} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} c_{n-1} \end{aligned}$$
- が成り立つ。従って、 $n \geq 2$ のとき、
- $$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} c_{n-1} \\ \Leftrightarrow c_n - \frac{2}{5} &= -\frac{1}{4} \left(c_{n-1} - \frac{2}{5} \right) \\ \Leftrightarrow c_n - \frac{2}{5} &= \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \left(c_1 - \frac{2}{5} \right) \\ \therefore c_n &= \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \end{aligned}$$
- であり、これは $n=1$ のときも成り立つ。これより、各 x に対して、
- $$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_{n-1}(t) \sin t dt \right\} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} c_n \\ &= \frac{x}{2} - \frac{\cos x}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{2}{5} + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{4} \right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{x}{2} - \frac{1}{5} \cos x \end{aligned}$$
- となることが分かる。

- (3)
- 対数の真数は正であるから、
- $$\begin{aligned} |x-a| > 0 &\Leftrightarrow x \neq a && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x-2 > 0 &\Leftrightarrow x > 2 && \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$
- が成り立つ。また、この真数条件のもとで、与えられた方程式より、
- $$\begin{aligned} \log_2 |x-a| &= \log_4 (x-2) \\ \Leftrightarrow \log_2 |x-a| &= \frac{\log_2 (x-2)}{\log_2 4} \\ \Leftrightarrow 2 \log_2 |x-a| &= \log_2 (x-2) \\ \Leftrightarrow (x-a)^2 &= x-2 \\ \Leftrightarrow x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 &= 0 && \cdots \cdots \textcircled{3} \end{aligned}$$
- を得る。よって①と②を満たす③の解を求めれば良い。ここで、 $x=a$ が③の解となるのは、
- $$\begin{aligned} a^2 - (2a+1)a + a^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \end{aligned}$$
- のときであり、このときの解は
- $$\begin{aligned} x^2 - (2 \cdot 2 + 1)x + 2^2 + 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 2, 3 \end{aligned}$$
- であるから、 $a=2$ のとき、①と②を満たす解は $x=3$ の1つである。
- 以下、 $a \neq 2$ のときを考える。このとき、③の解が存在するならばその解は①を満たすので、②の条件を満たす③の解についてのみ考えればよい。
- ③の左辺を $f(x)$ 、すなわち
- $$\begin{aligned} f(x) &= x^2 - (2a+1)x + a^2 + 2 \\ &= \left(x - \frac{2a+1}{2} \right)^2 - a + \frac{7}{4} \end{aligned}$$
- と定めると、 $y=f(x)$ は軸が直線 $x=\frac{2a+1}{2}$ で、頂点が点 $\left(\frac{2a+1}{2}, -a+\frac{7}{4}\right)$ の放物線である。よって③は
- $$-a + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{7}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$
- のとき重解を持ち、
- $$-a + \frac{7}{4} < 0 \Leftrightarrow a > \frac{7}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$
- のとき複数解を持つ。
- ここで、
- $$\begin{aligned} f(2) &= 2^2 - (2a+1) \cdot 2 + a^2 + 2 \\ &= a^2 - 4a + 4 \\ &= (a-2)^2 \\ &> 0 \quad (\because a \neq 2) \end{aligned}$$
- であるから、 $y=f(x)$ のグラフが下に凸であることに注意すると、③の解が②の範囲にあるのは $y=f(x)$ の軸の x 座標が2より大きい、すなわち
- $$\frac{2a+1}{2} > 2 \Leftrightarrow a > \frac{3}{2}$$
- のときであるが、④、⑤はともにこれを満たす。よって④のとき③は次図のように②の範囲に1つ重解を持ち、



- ⑤のとき(但し $a \neq 2$)③は次図のように②の範囲に2つ解を持つ。
-

- 以上より、求める解の個数は
- (a) $a < \frac{7}{4}$ のとき 0 個、
- (b) $a = \frac{7}{4}, 2$ のとき 1 個、
- (c) (a), (b) 以外 のとき 2 個
- であることが分かる。

2

(1)

$$f'(x) = -2x + (1+t^2)$$

であるから、点 $P(p, f(p))$ ($p > 0$) における $y = f(x)$ の接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (-2p + 1 + t^2)(x - p) - p^2 + (1 + t^2)p - t^2 \\ &= (-2p + 1 + t^2)x + p^2 - t^2 \end{aligned}$$

と表せる。これが原点を通るとき、

$$\begin{aligned} p^2 - t^2 &= 0 \\ \therefore p &= t \quad (\because p > 0, 0 < t < 1) \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} f(t) &= -t^2 + (1 + t^2)t - t^2 \\ &= t^3 - 2t^2 + t \end{aligned}$$

より、点 P の座標は t を用いて

$$(t, t^3 - 2t^2 + t)$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad (t, t^3 - 2t^2 + t)$$

(2)

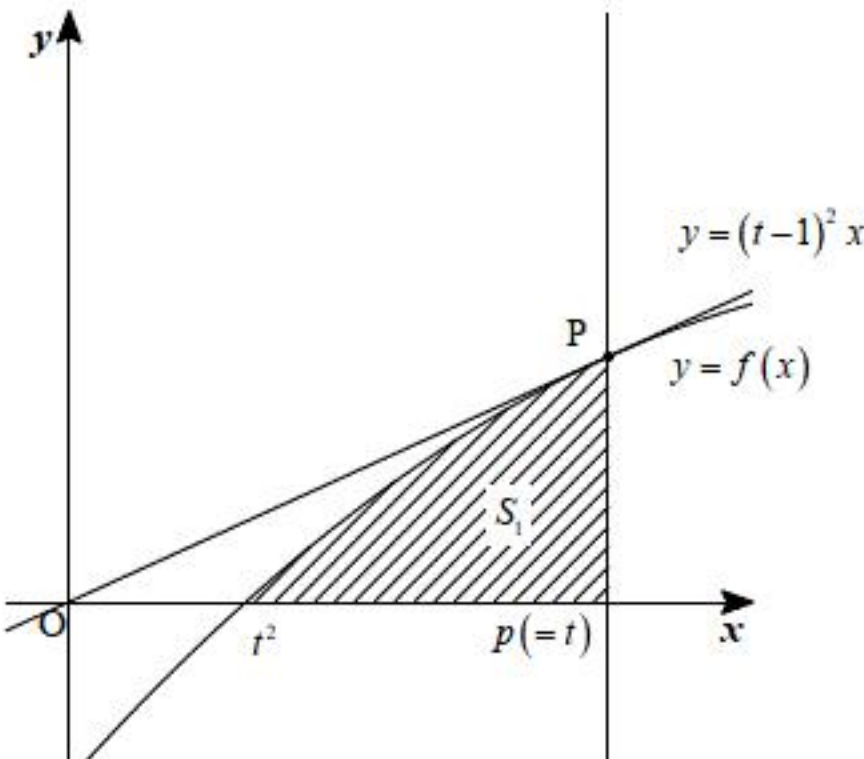
(1)より、点 P における $y = f(x)$ の接線の方程式は、

$$y = (t-1)^2 x$$

と表せる。また、 $y = f(x)$ と x 軸の交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} -x^2 + (1+t^2)x - t^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-t^2)(x-1) &= 0 \\ \therefore x &= t^2, 1 \end{aligned}$$

である。 $0 < t^2 < t < 1$ より、 S_1 は下図の斜線部の面積である。



よって、

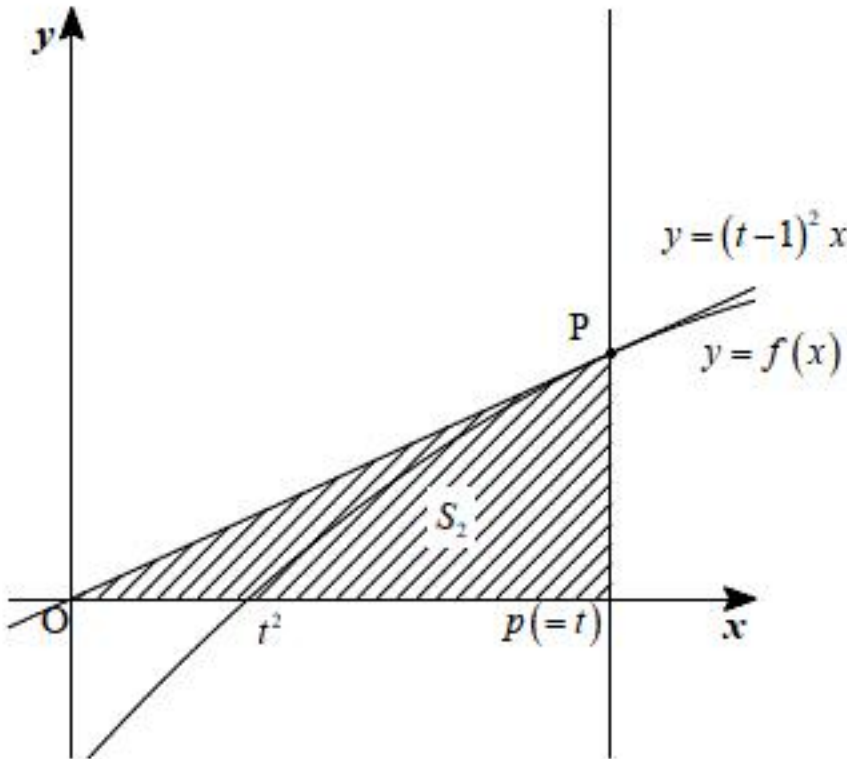
$$\begin{aligned} S_1 &= \int_{t^2}^t f(x) dx \\ &= \int_{t^2}^t \{-x^2 + (1+t^2)x - t^2\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(1+t^2)x^2 - t^2x \right]_{t^2}^t \\ &= -\frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}(1+t^2) \cdot t^2 - t^2 \cdot t + \frac{1}{3}t^6 - \frac{1}{2}(1+t^2) \cdot t^4 + t^2 \cdot t^2 \\ &= -\frac{1}{6}t^6 + t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad S_1 = -\frac{1}{6}t^6 + t^4 - \frac{4}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2$$

(3)

S_2 は下図の斜線部の面積である。



(1)より、

$$P(t, t^3 - 2t^2 + t)$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cdot t \cdot (t^3 - 2t^2 + t) \\ &= \frac{1}{2}t^4 - t^3 + \frac{1}{2}t^2 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、

$$\begin{aligned} S &= S_2 - S_1 \\ &= \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3 \end{aligned}$$

であるから、 $g(t) = \frac{1}{6}t^6 - \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{3}t^3$ とおくと、

$$\begin{aligned} g'(t) &= t^5 - 2t^3 + t^2 \\ &= t^2(t^3 - 2t + 1) \\ &= t^2(t-1)(t^2 + t - 1) \\ &= t^2(t-1) \left(t - \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \right) \left(t - \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right) \end{aligned}$$

と計算できる。したがって、 $0 < t < 1$ における $g(t)$ の増減表は下記の通りである。

t	(0)	...	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$	...	(1)
$g'(t)$	(0)	+	0	-	(0)
$g(t)$	(0)	↗	極大	↘	(0)

したがって、 $0 < t < 1$ において、 $g(t)$ は $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となる。以上より、 $0 < t < 1$ にお

いて、 S は $t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき最大となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

3

(1)

$$x = a \tan \theta$$

とおくと、

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{a}{\cos^2 \theta}$$

x	0	$\rightarrow$	a
θ	0	$\rightarrow$	$\frac{\pi}{4}$

であるから、与えられた定積分は

$$\begin{aligned} \int_0^a \frac{dx}{a^2 + x^2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a^2 + a^2 \tan^2 \theta} \cdot \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{a} d\theta \\ &= \frac{\pi}{4a} \end{aligned}$$

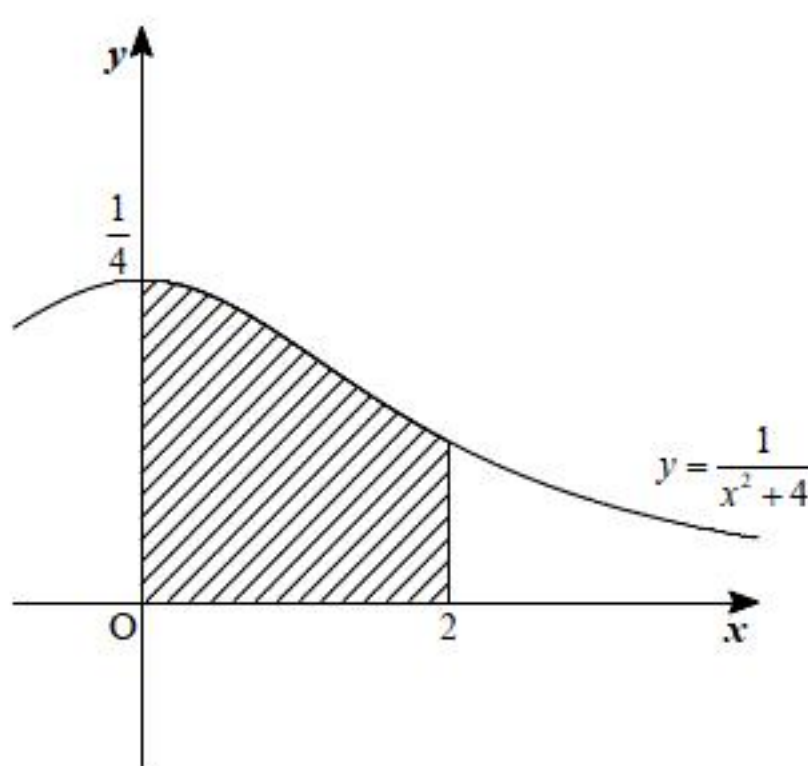
と計算できる。

(答) $\frac{\pi}{4a}$

(2)

$$\sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{4n^2 + k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{4 + \left(\frac{k}{n}\right)^2}$$

であるから、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{4n^2 + k^2}$ の値は下図の斜線部の面積に等しい。



したがって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{2n} \frac{n}{4n^2 + k^2} &= \int_0^2 \frac{1}{x^2 + 4} dx \\ &= \frac{\pi}{8} \quad (\because (1)) \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\pi}{8}$

(3)

(a)

$$f(x) = 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k$$

とおくと、 $1 + x^2 > 0$ より、与えられた不等式は

$$\frac{1}{1+x^2} - x^{2n+2} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2} + x^{2n+2} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$\Leftrightarrow 1 - (1+x^2)x^{2n+2} \leq (1+x^2)f(x) \leq 1 + (1+x^2)x^{2n+2} \quad \dots \textcircled{2}$$

と変形できる。ここで、

$$\begin{aligned} (1+x^2)f(x) &= (1+x^2) \left\{ 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-x^2)^n \right\} \\ &= 1 + x^2 \cdot (-x^2)^n \\ &= 1 + (-1)^n \cdot x^{2n+2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right\} - \left\{ 1 - (1+x^2)x^{2n+2} \right\} &= \left\{ (-1)^n + (1+x^2) \right\} x^{2n+2} \\ &\geq x^2 \cdot x^{2n+2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より②の左側の不等式が成立する。また、

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + (1+x^2)x^{2n+2} \right\} - \left\{ 1 + (-1)^n \cdot x^{2n+2} \right\} &= \left\{ (1+x^2) - (-1)^n \right\} x^{2n+2} \\ &\geq x^2 \cdot x^{2n+2} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

より②の右側の不等式が成立する。したがって題意が示された。

(証明終)

(b)

(3)(a)より①が成り立つので、各辺を積分した不等式

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} - x^{2n+2} \right) dx \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x^2} + x^{2n+2} \right) dx \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。ここで、(1)の結果より

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

が成り立つ。また、

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{k=1}^n (-x^2)^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot x^{2k} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= \left[x + \sum_{k=1}^n (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \right]_0^1 \\ &= 1 + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{2k+1} \\ &= a_n \end{aligned}$$

であるから、③より

$$\begin{aligned} \frac{\pi}{4} - \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 &\leq a_n \leq \frac{\pi}{4} + \left[\frac{x^{2n+3}}{2n+3} \right]_0^1 \\ \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+3} &\leq a_n \leq \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+3} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2n+3} \right) &= \frac{\pi}{4} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2n+3} \right) &= \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

であるから、はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{\pi}{4}$$

である。

(答) $\frac{\pi}{4}$