

1

〔解答〕

(1)					(2)					(3)
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
1	2	9	2	5	2	4	3	6	6	8

〔解説〕

(1)

数列 $\{a_n\}$ の一般項は

$$a_n = 5 \log_2 3 + \left(-\frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{2} \right) (n-1)$$

と表せる。よって

$$\begin{aligned} a_{10} &= 5 \log_2 3 + \left(-\frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{2} \right) (10-1) \\ &= \frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{9}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{11} &= 5 \log_2 3 + \left(-\frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{2} \right) (11-1) \\ &= -5 \end{aligned}$$

となる。

(2)

$$\begin{aligned} b_1 &= 2^{5 \log_2 3} \\ &= 2^{\log_2 3^5} \\ &= 3^5 \\ &= 243 \end{aligned}$$

であり、

$$\begin{aligned} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{2^{a_{n+1}}}{2^{a_n}} \\ &= 2^{a_{n+1} - a_n} \\ &= 2^{-\frac{1}{2} \log_2 3 - \frac{1}{2}} \\ &= 2^{-\log_2 \sqrt{3}} 2^{-\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{6} \end{aligned}$$

より、数列 $\{b_n\}$ は初項 243、公比 $\frac{\sqrt{6}}{6}$ の等比数列となる。

(3)

$$a_n < 0 \Leftrightarrow 2^{a_n} < 1 \Leftrightarrow b_n < 1$$

である。(2)の結果より、数列 $\{b_n\}$ の一般項は

$$b_n = 243 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \right)^{n-1}$$

と表せるから、求める n は

$$\begin{aligned} b_n &< 1 \\ \Leftrightarrow 243 \cdot \left(\frac{\sqrt{6}}{6} \right)^{n-1} &< 1 \\ \Leftrightarrow 243 &< 6^{\frac{n-1}{2}} \end{aligned}$$

を満たす最小の n である。ここで、

$$6^3 = 216$$

であるから、

$$\begin{aligned} 216 \cdot \sqrt{6} &> 216 \cdot 2 > 243 > 216 \\ \therefore 6^3 &< 243 < 6^{\frac{7}{2}} \end{aligned}$$

が成り立つ。よって求める n は

$$\frac{n-1}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow n = 8$$

である。

〔解答〕

(1)	(2)	(3)		(4)		
ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
6	2	3	5	1	9	5

〔解説〕

(1)

$$\begin{aligned}\overline{AB} &= \overline{OB} - \overline{OA} \\ &= (-2, 4, 4)\end{aligned}$$

より、

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + 4^2} = 6$$

である。

(2)

$$\begin{aligned}\overline{AP} &= \overline{OP} - \overline{OA} \\ &= (-3, 2, t-1) \\ \overline{BP} &= \overline{OP} - \overline{OB} \\ &= (-1, -2, t-5)\end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned}|\overline{AP}|^2 &= (-3)^2 + 2^2 + (t-1)^2 = t^2 - 2t + 14 \\ |\overline{BP}|^2 &= (-1)^2 + (-2)^2 + (t-5)^2 = t^2 - 10t + 30\end{aligned}$$

である。線分 AP と線分 BP の長さが等しくなるとき、 $|\overline{AP}|^2 = |\overline{BP}|^2$ であるから、

$$\begin{aligned}t^2 - 2t + 14 &= t^2 - 10t + 30 \\ \therefore t &= 2\end{aligned}$$

である。

(3)

 $\angle APB$ が直角となるとき、

$$\begin{aligned}\overline{AP} \cdot \overline{BP} &= 0 \\ \Leftrightarrow (-3, 2, t-1) \cdot (-1, -2, t-5) &= 0 \\ \Leftrightarrow t^2 - 6t + 4 &= 0 \\ \therefore t &= 3 \pm \sqrt{5}\end{aligned}$$

である。

(4)

 $\triangle ABP$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{PA}|^2 |\overline{PB}|^2 - (\overline{PA} \cdot \overline{PB})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overline{AP}|^2 |\overline{BP}|^2 - (\overline{AP} \cdot \overline{BP})^2}\end{aligned}$$

と表すことができる。よって、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \sqrt{(t^2 - 2t + 14)(t^2 - 10t + 30) - (t^2 - 6t + 4)^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{(t^4 - 12t^3 + 64t^2 - 200t + 420) - (t^4 - 12t^3 + 44t^2 - 48t + 16)} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{20t^2 - 152t + 404} \\ &= \sqrt{5t^2 - 38t + 101} \\ &= \sqrt{5\left(t - \frac{19}{5}\right)^2 + \frac{144}{5}}\end{aligned}$$

と変形できるので、 $\triangle ABP$ の面積が最小となるのは $t = \frac{19}{5}$ のときである。

〔解答〕

(1)	ア	イ	ウ	エ								
	4	5	6	5								
(2)	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス			
	7	1	2	1	7	1	2	3	4			
(3)	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ
	1	6	7	3	1	2	1	6	7	3	1	2

〔解説〕

(1)

 $-1 \leq \sin x \leq 1$ であるから

$$-\frac{1}{5} \leq \frac{1}{5} \sin x \leq \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{5} \leq \frac{1}{5} \sin x + 1 \leq \frac{6}{5}$$

となる。

(2)

三角関数の合成公式より

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{4} \cos x + 1 \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{4}\right)^2} \sin(x - \alpha) + 1 \\ &= \frac{5}{12} \sin(x - \alpha) + 1 \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{12}} = \frac{4}{5} \\ \cos \alpha &= \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{5}{12}} = -\frac{3}{5} \end{aligned}$$

である。従って、 $-1 \leq \sin(x - \alpha) \leq 1$ であることより、

$$\frac{7}{12} \leq g(x) \leq \frac{17}{12}$$

であることが分かる。また、

$$\begin{aligned} g(\alpha) &= 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3} \sin \alpha - \frac{1}{4} \cos \alpha + 1 &= 1 \\ \Leftrightarrow \tan \alpha &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

となる。

(3)

三角関数の倍角公式と合成公式より

$$\begin{aligned} h(x) &= \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin x \cos x - \frac{1}{3} \cos^2 x + 1 \\ &= \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{3} \cdot \frac{1 + \cos 2x}{2} + 1 \\ &= \frac{1}{4} \sin 2x - \frac{2}{3} \cos 2x + \frac{4}{3} \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2} \sin(2x - \beta) + \frac{4}{3} \\ &= \frac{\sqrt{73}}{12} \sin(2x - \beta) + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \frac{\frac{1}{4}}{\frac{\sqrt{73}}{12}} = \frac{3\sqrt{73}}{73} \\ \cos \beta &= \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{73}}{12}} = -\frac{8\sqrt{73}}{73} \end{aligned}$$

である。従って、 $-1 \leq \sin(2x - \beta) \leq 1$ であることより、

$$\frac{16 - \sqrt{73}}{12} \leq h(x) \leq \frac{16 + \sqrt{73}}{12}$$

であることが分かる。

[解答]

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
1	6	1	6	2	1	4	3	4	2	1	3	1	4	2	1

チ	ツ	テ	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ	ミ
6	1	4	1	3	1	4	2	1	2	2	3	1	6	1	4

[解説]

C を積分定数とすると,

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} dt &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} - \int \frac{1}{2}e^{-2t} dt \\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t} + C\end{aligned}$$

であるから, $F(x)$ は

$$\begin{aligned}F(x) &= \int_0^1 \left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^1 \\ &= \left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-1\right)e^{-2} + \frac{1}{4}e^{-2}\right\} - \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}e^{-2}\right)x + \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{4}e^{-2}\right)\end{aligned}$$

と書き表され, $G(x)$ は

$$\begin{aligned}G(x) &= \int_0^x \left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^x \\ &= \left(\frac{1}{3}xe^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-2x}\right) - \left(-\frac{1}{6}x + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

と書き表される。また, $x > 0$ のとき

$$0 < \frac{x}{3} < x$$

であるから, $H(x)$ は

$$\begin{aligned}H(x) &= \int_0^x \left|\frac{x}{3}-t\right|e^{-2t} dt \\ &= \int_0^{\frac{x}{3}} \left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} dt + \int_{\frac{x}{3}}^x \left(t-\frac{x}{3}\right)e^{-2t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} + \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_0^{\frac{x}{3}} + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x}{3}-t\right)e^{-2t} - \frac{1}{4}e^{-2t}\right]_{\frac{x}{3}}^x \\ &= \left(\frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x} + \frac{1}{6}x - \frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{3}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}e^{-\frac{2}{3}x}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}\right)e^{-2x} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2}{3}x} + \left(\frac{1}{6}x - \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

と書き表される。

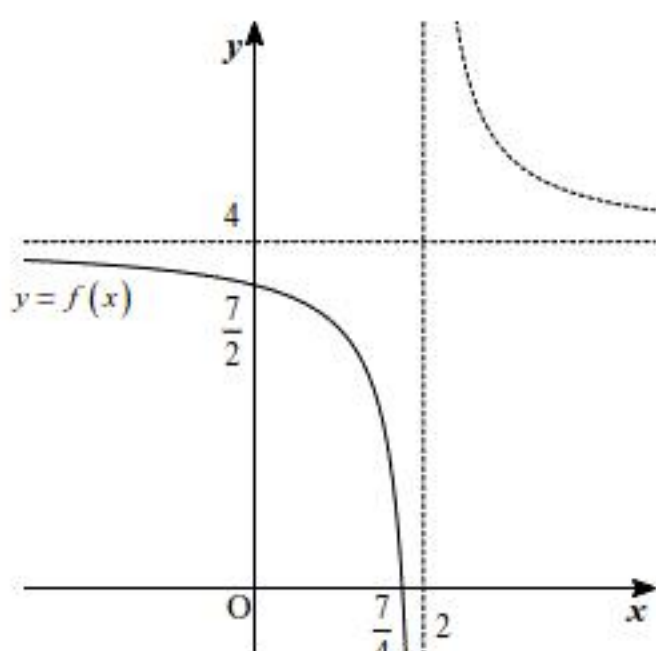
5

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{4x-7}{x-2} \\ &= \frac{1}{x-2} + 4 \end{aligned}$$

であるから、 $y=f(x)$ は双曲線 $y=\frac{1}{x}$ ($x<0$)を x 方向に2、 y 方向に4移動した曲線となる。

従って、その概形は以下の図の通りである。



(答) 前図

(2)

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2}$$

より、点 $\left(\frac{5}{4}, f\left(\frac{5}{4}\right)\right)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは

$$\begin{aligned} f'\left(\frac{5}{4}\right) &= -\frac{1}{\left(\frac{5}{4}-2\right)^2} \\ &= -\frac{16}{9} \end{aligned}$$

であるから、接線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= f'\left(\frac{5}{4}\right)\left(x-\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{5}{4}\right) \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{16}{9}\left(x-\frac{5}{4}\right) + \frac{8}{3} \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{16}{9}x + \frac{44}{9} \end{aligned}$$

となる。

(答) $y = -\frac{16}{9}x + \frac{44}{9}$

(3)

点 $(t, f(t))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きは $-\frac{1}{(t-2)^2}$ であるから、点 $(t, f(t))$ における

法線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= (t-2)^2(x-t) + \frac{1}{t-2} + 4 \\ \Leftrightarrow y &= (t-2)^2x - t(t-2)^2 + \frac{1}{t-2} + 4 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。直線 $5x-2y=a$ が曲線 $y=f(x)$ の法線となるとき、

$$\begin{aligned} 5x-2y &= a \\ \Leftrightarrow y &= \frac{5}{2}x - \frac{a}{2} \end{aligned}$$

と①を比較すると

$$\begin{cases} \frac{5}{2} = (t-2)^2 & \dots \textcircled{2} \\ -\frac{a}{2} = -t(t-2)^2 + \frac{1}{t-2} + 4 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

であるから、②より

$$\begin{aligned} t-2 &= \pm \frac{\sqrt{10}}{2} \\ \therefore t &= 2 - \frac{\sqrt{10}}{2} \quad (\because t < 2) \end{aligned}$$

である。これを③に代入して

$$\begin{aligned} -\frac{a}{2} &= -\left(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}\right) \cdot \frac{5}{2} - \frac{\sqrt{10}}{5} + 4 \\ \Leftrightarrow a &= 2 - \frac{21\sqrt{10}}{10} \end{aligned}$$

である。

(答) $a = \frac{21\sqrt{10}}{10} - 2$

(4)

$y=f(x)$ と x 軸との交点の x 座標は、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x-2} + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{7}{4} \end{aligned}$$

であるから、(1)のグラフより

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{7}{4}} \left(\frac{1}{x-2} + 4 \right) dx \\ &= \left[\log|x-2| + 4x \right]_0^{\frac{7}{4}} \\ &= \log \frac{1}{4} + 7 - \log 2 \\ &= 7 - 3\log 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $S = 7 - 3\log 2$

(5)

(1)のグラフより

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{7}{4}} \pi \left(\frac{1}{x-2} + 4 \right)^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{7}{4}} \left\{ \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{8}{x-2} + 16 \right\} dx \\ &= \pi \left[-\frac{1}{x-2} + 8\log|x-2| + 16x \right]_0^{\frac{7}{4}} \\ &= \pi \left\{ \left(4 + 8\log \frac{1}{4} + 28 \right) - \left(\frac{1}{2} + 8\log 2 \right) \right\} \\ &= \left(\frac{63}{2} - 24\log 2 \right) \pi \end{aligned}$$

である。

(答) $V = \left(\frac{63}{2} - 24\log 2 \right) \pi$