

F 1 数 学

この冊子は、数学の問題で 1 ページより 5 ページまであります。

[注 意]

- (1) 試験開始の指示があるまで、この冊子を開いてはいけません。
- (2) 監督者から受験番号等記入の指示があったら、解答用紙に志望学科と受験番号を記入してください。また、解答用マークシートに受験番号と氏名を記入し、さらに受験番号と志望学科をマークしてください。
- (3) 解答は、所定の解答用紙に記入したもの及び解答用マークシートにマークしたものだけが採点されます。
- (4) 解答用マークシートについて
 - ① 解答用マークシートは、絶対に折り曲げてはいけません。
 - ② マークには黒鉛筆(H BまたはB)を使用してください。指定の黒鉛筆以外でマークした場合、採点できないことがあります。
 - ③ 誤ってマークした場合は、消しゴムで丁寧に消し、消しくずを完全に取り除いたうえで、新たにマークしてください。
 - ④ 解答欄のマークは、横 1 行について 1 箇所に限ります。2 箇所以上マークすると採点されません。あいまいなマークは無効となるので、はっきりマークしてください。
 - ⑤ 解答用マークシート上部に記載されている解答上の注意事項を、必ず読んでから解答してください。
- (5) 試験開始の指示があったら、初めに問題冊子のページ数を確認してください。
ページの落丁・乱丁、印刷不鮮明等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。
- (6) 問題冊子は、試験終了後、持ち帰ってください。

問題 1 の解答は解答用マークシートにマークしなさい。

1 次の文章中の ア から ヨ までに当てはまる数字 0～9 を求めて、解答用マークシートの指定された欄にマークしなさい。ただし、分数は既約分数として表しなさい。なお、カ などは既出の カ を表す。

(40 点)

(1) 実数 a に対し、2つの2次関数

$$f(x) = x^2 - 2a^2x - a^4 - 2a^2 - 8$$

$$g(x) = -x^2 + 2(a^2 - 4)x - 3a^4 - 2a^3 - 16$$

を考える。

(a) すべての実数 x に対して $g(x) < f(x)$ が成り立つための必要十分条件は

$$a > -\text{ア} \quad \text{かつ} \quad a \neq \text{イ}$$

である。

(b) $g(x)$ の最大値は $-\text{ウ}a^4 - \text{エ}a^3 - \text{オ}a^2$ である。

(c) 次の条件(*)を満たす実数 b がただ1つ存在するとする。

(*) 「すべての実数 x に対して $g(x) \leq b \leq f(x)$ が成り立つ。」

このとき、

$$a = -\text{カ} \quad \text{または} \quad a = \text{キ}$$

であり、 $a = -\text{カ}$ のときは $b = -\text{クケ}$ 、 $a = \text{キ}$ のときは $b = -\text{コサ}$ である。

右のページは白紙です。

(2) 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = 1, \quad b_1 = -2, \quad \begin{cases} a_{n+1} = 8a_n + b_n \\ b_{n+1} = -25a_n - 2b_n \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき

$$\boxed{\text{シ}} a_{n+1} + b_{n+1} = \boxed{\text{ス}} (\boxed{\text{シ}} a_n + b_n)$$

であるので,

$$b_n = \boxed{\text{セ}}^n - \boxed{\text{ソ}} a_n$$

である。これにより

$$\frac{a_{n+1}}{\boxed{\text{タ}}^n} = \frac{a_n}{\boxed{\text{タ}}^{n-1}} + 1$$

となる。したがって

$$a_n = n \cdot \boxed{\text{チ}}^{n-1} \boxed{\text{ツ}}$$

となる。

右のページは白紙です。

(3) 平面上に、 $\triangle ABC$ とその内部の点 O をとったとき、

$$OA = 1 + \sqrt{3}$$

$$OB = \sqrt{3}$$

$$OC = \sqrt{2}$$

$$\sqrt{3} \overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + 3\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

となっていた。

このとき、内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値は $-\frac{\boxed{\text{テ}} - \sqrt{\boxed{\text{ト}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ であるので

$$\angle AOB = \boxed{\text{ニ}} \boxed{\text{ヌ}} \boxed{\text{ネ}}^{\circ}$$

である。同様に $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = -\frac{\boxed{\text{ノ}} - \sqrt{\boxed{\text{ハ}}}}{\boxed{\text{ナ}}}$ から

$$\angle AOC = \boxed{\text{ヒ}} \boxed{\text{フ}} \boxed{\text{ヘ}}^{\circ}$$

である。したがって、

$$\angle BOC = \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^{\circ}$$

となる。また、

$$\sin \boxed{\text{ホ}} \boxed{\text{マ}} \boxed{\text{ミ}}^{\circ} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ム}}} \left(\boxed{\text{メ}} + \sqrt{\boxed{\text{モ}}} \right)}{4}$$

である。したがって、 $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{\text{ヤ}} + \frac{\boxed{\text{ユ}} \sqrt{\boxed{\text{ヨ}}}}{2}$ である。

右のページは白紙です。

問題 2 の解答は白色の解答用紙に記入しなさい。

2 $a > 0$ を定数とし、座標平面上の点 $P(p, 0)$ から放物線 $C: y = ax^2 + 2a$ に 2 本の接線 PQ_1, PQ_2 を引く。ここで Q_1, Q_2 は接点で、 Q_1 の x 座標 q_1 は Q_2 の x 座標 q_2 より小さいとする。

- (1) q_1 と q_2 を、 p を用いて表せ。
- (2) 直線 Q_1Q_2 の方程式を、 a と p を用いて表せ。
- (3) S_1 を直線 Q_1Q_2 と曲線 C で囲まれた部分の面積、 S_2 を曲線 C と線分 PQ_1, PQ_2 で囲まれた部分の面積とする。 S_1 と S_2 を、 a と p を用いて表し、 $\frac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。
- (4) $PQ_1 \perp PQ_2$ となるとき、 a の値を求めよ。

(30 点)

右のページは白紙です。

問題 3 の解答はクリーム色の解答用紙に記入しなさい。

3 定数 a に対し、

$$f(x) = a \sin 2x - \tan x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$$

とおく。

(1) $a > \frac{1}{2}$ であるとする。実数 θ を、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ かつ $f(\theta) = 0$ を満たすものとするとき、 $\cos \theta$ を a を用いて表せ。

(2) 不定積分

$$\int f(x) dx$$

を求めよ。

(3) $\frac{1}{2} < a < 1$ であるとする。このとき、

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x)| dx + \log a$$

を a の 1 次式で表せ。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。

(30 点)

右のページは白紙です。